

MATRICES

DETERMINANTES SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

TEORÍA Y PRÁCTICA

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ cuyos elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos, es decir: $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$

En general:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dedicatoria

A. Clara Elizabeth

*Por su comprensión y constante
aliento para seguir bregando.*

*A. Armando Jr., Hellen,
Katherine y Diego*

*Por quienes mi ánimo y mi
felicidad son siempre funciones
crecientes.*

INDICE

CAPITULO 1 MATRICES

Matriz	9
Matriz Cuadrada - Matriz Nula	10
Igualdad de Matrices	11
Operaciones con Matrices	11
- Adición de Matrices	11
- Multiplicación de una Matriz por un Escalar	12
- Multiplicación de Matrices	13
Traza de una Matriz	17

CAPITULO 2 MATRICES ESPECIALES

Matriz Triangular Superior	18
Matriz Triangular Inferior	18
Matriz Diagonal	19
Matriz Escalar	20
Matriz Unidad o Identidad	20
Casos Particulares de Matrices Cuadradas	20
- Matriz Periódica	20
- Matriz Idempotente	21
- Matriz Nilpotente	21
- Matriz Involutiva	21
Matriz Traspuesta	22
Matriz Simétrica	23
Matriz Hemisimétrica o antisimétrica	23
Matriz Conjugada	25
Matriz Hermítica	26
Matriz Hemihermítica	26

CAPITULO 3 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Permutaciones Decremento	29
Término de una Matriz Cuadrada	29
Número de Términos de una Matriz Cuadrada	30
Determinante de una Matriz Cuadrada	30
Determinante de Segundo Orden	31
Determinante de Tercer Orden	31
Regla de Sarrus	32

Propiedades de los Determinantes.....	33
Matriz Regular y Matriz Singular.....	39
Menor Complementario de un elemento	39
Adjunto de un elemento.....	40

CAPÍTULO 4 MATRIZ ADJUNTA Y MATRIZ INVERSA

Matriz Adjunta	45
Determinante de la Matriz Adjunta	46
Matriz Inversa	48
Condición Necesaria y suficiente para que una Matriz Cuadrada posea Inversa	49
Matriz Ampliada	51
Recomendaciones para formar la Matriz Identidad en la parte izquierda.....	54
Matriz Ortogonal	55

CAPÍTULO 5 CARACTERÍSTICA O RANGO DE UNA MATRIZ

Submatrices Cuadradas	57
Característica o Rango de una Matriz	58
Matrices Equivalentes.....	59
Matriz Canónica	60

CAPÍTULO 6 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sistema de Ecuaciones Lineales - Forma General.....	63
Representación de Sistema Lineal mediante la Notación Matricial	64
Solución de un Sistema Lineal	65
Sistemas Equivalentes.....	65
Sistema Lineal no Homogéneo.....	69
Sistema Lineal Homogéneo.....	71
Regla de Cramer.....	73

PROBLEMAS RESUELTOS

Nivel Básico	75
Nivel Intermedio.....	105
Nivel Avanzado.....	137

PROBLEMAS PROPUESTOS

Nivel Básico	159
Nivel Intermedio.....	164
Nivel Avanzado.....	169
Claves	175

NOTACIÓN EMPLEADA

\forall	:	6
\wedge	:	y
\rightarrow	:	Entonces
\leftrightarrow	:	Si y sólo si
\forall	:	Para todo
$\overline{1; n}$:	Todos los enteros desde 1 hasta n
A	:	Matriz A
a_{ij}	:	Elemento de la matriz A ubicado en la fila i y en la columna j
A^t	:	Traspuesta de la matriz A
\overline{A}	:	Matriz conjugada de A
A^{-1}	:	Matriz inversa de A
I	:	Matriz Identidad
I_n	:	Matriz Identidad de orden n
$ A $:	Determinante de la matriz A .
$ M_{ij} $:	Menor complementario de a_{ij}
α_{ij}	:	Adjunto de a_{ij}
$ADJ(A)$:	Matriz adjunta de A
$n!$:	Factorial de n
\sim	:	Es equivalente a
f_i	:	Elementos de la fila i ó fila i
$f_i \times f_j$:	Intercambio de la fila i con la fila j

MATRICES

MATRIZ

Es un arreglo, en forma rectangular, de mn elementos dispuestos en " m " filas (*líneas horizontales*) y " n " columnas (*líneas verticales*) y que además verifican determinadas reglas de operación.

Una matriz de m filas y n columnas se dice que es de orden $m \times n$ y ésta se encierra entre "corchetes" o "paréntesis".

EJEMPLO 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{2 filas} \\ \text{3 columnas} \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{4 filas} \\ \text{3 columnas} \end{matrix}$$

Una matriz de orden $1 \times n$ (de una sola fila) se denomina *matriz fila* y otra de orden $m \times 1$ (de una sola columna) se denomina *matriz columna*.

EJEMPLO 2:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \quad \begin{matrix} \text{1 fila} \\ \text{3 columnas} \end{matrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

Matriz fila

Matriz columna

Una matriz de orden $m \times n$, en general, se representa así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{Notación de LEIBNITZ} \quad (1.1)$$

donde a_{ij} se denomina elemento de la matriz; siendo el primer subíndice (i) el número de

- c_j : Elementos de la columna j o columna j
- $c_i \times c_j$: Intercambio de la columna i con la columna j
- $k \cdot f_i$: Elementos de la fila i multiplicados por el escalar k
- $k \cdot c_j$: Elementos de la columna j multiplicados por el escalar k
- $f_i + k \cdot f_j$: Elementos de la fila i más los correspondientes elementos de la fila j multiplicados por el escalar k
- $c_i + k \cdot c_j$: Elementos de la columna i más los correspondientes elementos de la columna j multiplicados por el escalar k
- $>$: Mayor que
- $<$: Menor que
- \geq : Mayor o igual que
- \leq : Menor o igual que
- $\sum_{i=1}^n F(i)$: Sumatoria de los elementos de la forma $F_{(i)}$, desde $i = 1$ hasta $i = n$
- $\prod_{i=1}^n F(i)$: Productoria de los factores de la forma $F_{(i)}$, desde $i = 1$ hasta $i = n$
- $[A : B]$: Matriz ampliada de A y B

la fila y el segundo subíndice (j) el número de la columna a las que pertenece dicho elemento.

EJEMPLO 3

- * El elemento a_{24} está ubicado en la fila 2 y columna 4.
- * El elemento a_{35} está ubicado en la fila 3 y columna 5
- * El elemento a_{m2} está en la fila m y la columna 2.

La matriz anterior se puede representar, en forma abreviada, así:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{donde: } i = 1; 2; 3; \dots; m \quad \text{y} \quad j = 1; 2; 3; \dots; n \quad (1.2)$$

Notación de KRONECKER

MATRIZ CUADRADA

Es aquella donde el número de filas es igual al número de columnas. Una matriz de " n " filas y " n " columnas se denomina matriz de orden n .

EJEMPLO 4

$$A = [a_{ij}] \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

En toda matriz cuadrada de orden " n ", la diagonal principal es aquella línea imaginaria formada por los elementos: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Los elementos de la forma: a_{ii} ; $\forall i = \overline{1; n}$, pertenecen a la diagonal principal.

MATRIZ NULA

Es aquella donde todos sus elementos son iguales a cero.

EJEMPLO 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3} \quad C = [0 \ 0 \ 0]_{1 \times 3}$$

IGUALDAD DE MATRICES

Sean dos matrices A y B del mismo orden $m \times n$ es decir:

$$A = [a_{ij}] ; B = [b_{ij}] ; i = 1; 2; 3; \dots; m ; j = 1; 2; 3; \dots; n$$

Las matrices A y B son iguales si sus elementos correspondientes son respectivamente iguales. Así:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} ; \forall i = \overline{1; m} , j = \overline{1; n} \quad (1.3)$$

EJEMPLO 6

Hallar los valores de a ; b ; c y d , para que las matrices sean iguales:

$$A = \begin{bmatrix} 2a+b & -4 \\ 13 & 3c+d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 19 & a+2b \\ c+3d & 15 \end{bmatrix}$$

Si son iguales se debe cumplir que: $2a+b = 19$, $a+2b = -4$
 $c+3d = 13$, $3c+d = 15$

De donde: $a = 14$, $b = -9$, $c = 4$, $d = 3$

OPERACIONES CON MATRICES

ADICION DE MATRICES

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices de orden $m \times n$, entonces la adición de las matrices A y B ($A+B$) es otra matriz $C = [c_{ij}]$, llamada *matriz suma*, tal que:

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad (1.4)$$

y también de orden $m \times n$

EJEMPLO 7

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 \\ -2+1 & 2+3 \\ 1+4 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Dos matrices A y B del mismo orden $m \times n$, se dice que son **CONFORMES** con respecto a la adición.

MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Sea la matriz: $A = [a_{ij}]$ y un escalar k ($k \neq 0$), entonces:

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}] \quad \text{ó} \quad A \cdot k = [a_{ij} \cdot k] \quad (1.5)$$

Es decir, el escalar k multiplica a cada uno de los elementos de la matriz A .

EJEMPLO 8

Sea: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

entonces: $3A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$ y $-5A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 5 & -5 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$

Propiedades:

1. $k(A+B) = kA + kB = (A+B) \cdot k$
2. $-A = (-1) \cdot A$
3. $A - B = A + (-B)$
4. $(k+q)A = k \cdot A + q \cdot A$

(1.6)

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Definición: Sean dos matrices:

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1p}] \text{ , matriz fila de orden } 1 \times p \text{ y}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} \text{ , matriz columna de orden } p \times 1 \text{ ,}$$

entonces el producto de multiplicar las matrices A y B ($A \cdot B$ en ese orden) es otra matriz C de orden 1×1 , tal que:

$$C = A \cdot B = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1p}]_{1 \times p} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix}_{p \times 1} = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} + \dots + a_{1p} b_{p1}]_{1 \times 1} \quad (1.7)$$

$$\text{es decir: } C = \left[\sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k1} \right]_{1 \times 1} \quad (1.8)$$

EJEMPLO 9

$$* \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)] = [-1]$$

$$* \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = [3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 4] = [13]$$

Definición: Sean dos matrices: $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times p$ y $B = [b_{ij}]$ de orden $p \times n$, entonces el producto de multiplicar las matrices A y B es otra matriz C ($A \cdot B = C$, y no de otra manera) de orden $m \times n$, tal que:

$$C = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right] ; \quad i = \overline{1; m} \quad , \quad j = \overline{1; n} \quad (1.9)$$

El producto de multiplicar matrices (AB en ese orden) está definido si y sólo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B , siendo así A y B (en ese orden) CONFORMES a la multiplicación.

EJEMPLO 10

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

donde A (de 2 columnas) y B (de 2 filas) son CONFORMES con respecto a la multiplicación, luego:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 11

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

como el número de columnas de A (2) es igual al número de filas de B (2), entonces A y B son CONFORMES a la multiplicación.

Luego: $C = AB = [c_{ij}]$ donde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kj} ; \quad i = \overline{1; 3} \quad , \quad j = \overline{1; 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Definición: Sean dos matrices: $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times p$ tal que a_{ij} es su i -ésima fila y $B = [b_{ij}]$ de orden $p \times n$ tal que b_{ij} es su j -ésima columna, entonces el producto de multiplicar A y B (AB en ese orden) es:

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \alpha_1 \beta_3 & \dots & \alpha_1 \beta_n \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \alpha_2 \beta_3 & \dots & \alpha_2 \beta_n \\ \alpha_3 \beta_1 & \alpha_3 \beta_2 & \alpha_3 \beta_3 & \dots & \alpha_3 \beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m \beta_1 & \alpha_m \beta_2 & \alpha_m \beta_3 & \dots & \alpha_m \beta_n \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (1.10)$$

EJEMPLO 12

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

$$C = AB = \begin{bmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

donde: $\alpha_1 \beta_1 = [-1 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = [8]$ $\alpha_1 \beta_2 = [-1 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = [-5]$

$\alpha_2 \beta_1 = [3 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = [6]$ $\alpha_2 \beta_2 = [3 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = [9]$

Luego: $C = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

EJEMPLO 13

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_1 & \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_4 \beta_1 & \alpha_4 \beta_2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

donde: $\alpha_1 \beta_1 = [2 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [3]$ $\alpha_1 \beta_2 = [2 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [-1]$

$\alpha_2 \beta_1 = [1 \ -3 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [6]$ $\alpha_2 \beta_2 = [1 \ -3 \ 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [8]$

Además: $\alpha_3 \beta_1 = \alpha_1 \beta_1$; $\alpha_3 \beta_2 = \alpha_1 \beta_2$; $\alpha_4 \beta_1 = \alpha_2 \beta_1$; $\alpha_4 \beta_2 = \alpha_2 \beta_2$.

Luego: $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -8 \\ 3 & -1 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$

Propiedades:

Siendo las matrices conformes respecto a las operaciones indicadas, se tiene:

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $ABC = A(BC) = (AB)C$
4. AB no necesariamente es igual a BA
5. Si $AB = BA$, entonces se dice que A y B son CONMUTABLES O PERMUTABLES.
6. $AB = 0$ no necesariamente implica que $A = 0 \vee B = 0$.
7. $AB = AC$ no necesariamente implica que $B = C$.
8. Si $A = B$, entonces: $AC = BC \vee CA = CB$
9. Para una matriz cuadrada A :
 - * $A \cdot A = A^2$
 - * $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3$
 - * $A \cdot A^3 = A^3 \cdot A = A^4$
 - * $A \cdot A^{n-1} = A^{n-1} \cdot A = A^n$

(1.11)

En general:

10. Para una matriz cuadrada A : $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$; $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+$.

TRAZA DE UNA MATRIZ

A la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A se le denomina traza y se denota por:

$$\text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

EJEMPLO 14

Sea: $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\text{Traza}(A) = 6 + (-2) + 5 = 9$

Propiedades:

1. $\text{Traza}(A + B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$
2. $\text{Traza}(kA) = k \text{Traza}(A)$; $\forall k$ ESCALAR ($k \neq 0$)
3. $\text{Traza}(AB) = \text{Traza}(BA)$

(1.12)

MATRICES ESPECIALES

2^{do}

Capítulo

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Es aquella matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ cuyos elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos, es decir:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j \quad (2.1)$$

EJEMPLOS 15

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

En general:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Es aquella matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$, cuyos elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos, es decir:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i < j \quad (2.3)$$

EJEMPLOS 16

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

En general:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

MATRIZ DIAGONAL

Es aquella matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ que es triangular superior e inferior a la vez; es decir:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j \vee i < j \quad (2.5)$$

EJEMPLO 17

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{Diag} (4; 2) \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Diag} (1; -3; 2)$$

En general:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{Diag.} (a_{11}; a_{22}; a_{33}; \dots; a_{nn}) \quad (2.6)$$

MATRIZ ESCALAR

Es aquella matriz diagonal donde los elementos de la diagonal principal son iguales a un escalar k ($k \neq 0$), es decir:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = k \quad (2.7)$$

EJEMPLO 18

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \text{Diag}(-4; -4) \quad ; \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \text{Diag}(7; 7; 7)$$

MATRIZ UNIDAD O IDENTIDAD

Es aquella matriz escalar donde $k = 1$ y se representa así:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

PROPIEDADES:

1. Sea A una matriz de orden $m \times n$, entonces:

$$A \cdot I_n = I_m \cdot A = I_m \cdot A \cdot I_n = A$$

2. $I + I + \dots$ (p veces) $= p \cdot I = \text{Diag}(p; p; p; \dots; p)$

3. $I^n = I$; $\forall n \in \mathbb{N}$

4. Sea A una matriz cuadrada: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

CASOS PARTICULARES DE MATRICES CUADRADAS

$$\text{Si: } A^k = I \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow A \text{ es una matriz PERIÓDICA} \quad (2.10)$$

Si k es el menor número entero positivo que satisface la condición anterior, entonces A tiene período " k ". Además:

$$A^{k+1} = A \quad A^{k+2} = A^2 \quad A^{k+3} = A^3 \quad A^{k+4} = A^4$$

y así sucesivamente.

$$\text{Si: } A^2 = A \rightarrow A \text{ es una matriz IDEMPOTENTE} \quad (2.11)$$

Además, si: $A^2 = A \rightarrow A^n = A$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad n \geq 2$

$$\text{Si: } A^p = 0 \quad ; \quad p \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow A \text{ es una matriz NILPOTENTE} \quad (2.12)$$

Si p es el menor número entero positivo que verifica la condición anterior, entonces A es una matriz nilpotente de índice " p ". Además:

$$A^{p+1} = 0 \quad ; \quad A^{p+2} = 0 \quad ; \quad A^{p+3} = 0 \quad ; \quad A^{p+4} = 0$$

y así sucesivamente.

$$\text{Si: } A^2 = I \rightarrow A \text{ es una matriz INVOLUTIVA} \quad (2.13)$$

y en consecuencia: $A^n = A$, si n es impar ; $A^n = I$, si n es par.

EJEMPLO 19

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (-I)(A) = -A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-A)A = -A^2$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = (-A^2)A = -A^3 = -(-I) = I$$

luego A es periódica, además se observa que $k = 6$ es el menor número entero positivo que satisface la condición anterior, entonces $k = 6$ es el período.

EJEMPLO 20

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \rightarrow A \text{ es idempotente}$$

Además, siendo A idempotente, se cumple que: $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

EJEMPLO 21

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$A^2 = 0 \rightarrow A \text{ es nilpotente de índice 2.}$$

EJEMPLO 22

Sea la matriz: $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$B^2 = 0 \rightarrow \text{es nilpotente de índice 2.}$$

MATRIZ TRASPUESTA

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $m \times n$, la matriz *traspuesta* de A , que se denota por A^t , se obtiene colocando las filas (o columnas) de A como columnas (o filas) en A^t , es decir:

$$A^t = [b_{ij}]_{n \times m} \quad \text{donde: } b_{ij} = a_{ji}; \quad i = \overline{1; n} \wedge j = \overline{1; m} \quad (2.14)$$

EJEMPLO 23

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

entonces: $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

entonces: $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

PROPIEDADES:

1. $(A^t)^t = A$
 2. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$, $\forall k$ escalar
 3. $(A+B)^t = A^t + B^t$
 4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- (2.15)

MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n es *simétrica* si y solo si: $A^t = A$, es decir si:

$$a_{ji} = a_{ij} \quad ; \quad \forall i, j = \overline{1; n} \quad (2.16)$$

EJEMPLO 24

Para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A, \quad \text{luego } A \text{ es simétrica.}$$

Para la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = B, \quad \text{luego } B \text{ es simétrica.}$$

MATRIZ HEMISIMÉTRICA O ANTISIMÉTRICA

La matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n es *hemisimétrica* si y solo si: $A^t = -A$; es decir si:

$$a_{ji} = -a_{ij}; \quad \forall i, j = \overline{1; n} \quad (2.17)$$

Observe que los elementos de la diagonal principal son nulos, pues para que:

$$a_{11} = -a_{11}; \quad a_{22} = -a_{22}; \quad a_{33} = -a_{33}; \quad \dots; \quad a_{nn} = -a_{nn},$$

se debe cumplir que: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = 0$

EJEMPLO 25

Para la matriz: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -A,$

luego A es hemisimétrica.

Para la matriz: $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^t = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -B$

luego B es hemisimétrica.

PROPIEDADES:

1. Si A es simétrica, entonces:

$k \cdot A$ también es simétrica; $\forall k$ escalar ($k \neq 0$)

2. Si A es hemisimétrica, entonces:

$k \cdot A$ también es hemisimétrica; $\forall k$ escalar ($k \neq 0$)

3. Si A es una matriz cuadrada, entonces:

$A + A^t$ es una matriz simétrica.

$A - A^t$ es una matriz hemisimétrica.

4. Toda matriz cuadrada A se puede expresar como la adición de una matriz simétrica con otra hemisimétrica, así:

$$A = B + C, \quad \text{donde} \quad B = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

(2.18)

EJEMPLO 26

Dada la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n , demostrar que: $A + A^t$ es simétrica y que $A - A^t$ es hemisimétrica.

* Sea $B = [b_{ij}] = A + A^t = [a_{ij}] + [a_{ji}] = [a_{ij} + a_{ji}]$

donde: $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij} = b_{ji} \quad \forall i, j = \overline{1; n}$, es decir: $B = B^t$

Luego: $B = A + A^t$ es simétrica

* Sea $C = [c_{ij}] = A - A^t = [a_{ij}] - [a_{ji}] = [a_{ij} - a_{ji}]$

donde: $c_{ij} = a_{ij} - a_{ji} = -(a_{ji} - a_{ij}) = -c_{ji}; \quad \forall i, j = \overline{1; n}$, es decir: $C = -C^t$

Luego: $C = A - A^t$ es hemisimétrica.

MATRIZ CONJUGADA

Si A es una matriz de orden $m \times n$ tal que $A = [a_{ij}]$, entonces la matriz conjugada de A es:

$$\bar{A} = [\bar{a}_{ij}] \quad \text{también de orden } m \times n$$

EJEMPLO 27

* $A = \begin{bmatrix} 2+i & -i \\ 1-i & 7 \end{bmatrix}$ entonces $\bar{A} = \begin{bmatrix} \overline{2+i} & \overline{-i} \\ \overline{1-i} & \overline{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-i & i \\ 1+i & 7 \end{bmatrix}$

* $B = \begin{bmatrix} i & 1-3i & 5 \\ 2 & i-1 & -3i \\ 3+i & -6 & 5i \end{bmatrix}$ entonces $\bar{B} = \begin{bmatrix} -i & 1+3i & 5 \\ 2 & -i-1 & 3i \\ 3-i & -6 & -5i \end{bmatrix}$

PROPIEDADES:

1. $\overline{(\bar{A})} = A$

2. $\overline{(k \cdot A)} = \bar{k} \cdot \bar{A}$

3. $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$

4. $\overline{(\bar{A} \bar{B})} = A \cdot B$

5. $(\bar{A})^t = \overline{(A^t)}$

(2.20)

MATRIZ HERMÍTICA

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n se denomina *hermítica* si y solo si:

$\overline{A^t} = A$, es decir:

$$\overline{a_{ji}} = a_{ij}, \quad \forall i, j = \overline{1; n} \quad (2.21)$$

Para los elementos de la diagonal principal a_{kk} , $k = \overline{1; n}$ se tiene que:

$$\overline{a_{kk}} = a_{kk} \leftrightarrow a_{kk} \in \mathbb{R},$$

osea, éstos elementos deben ser reales.

EJEMPLOS 28

$$* A = \begin{bmatrix} 8 & 1-3i \\ 1+3i & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad \overline{A^t} = \begin{bmatrix} \overline{8} & \overline{1-3i} \\ \overline{1+3i} & \overline{5} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 8 & 1-3i \\ 1+3i & 5 \end{bmatrix} = A$$

luego A es hermítica

$$* B = \begin{bmatrix} 4 & -i & 3+2i \\ i & -3 & 4-7i \\ 3-2i & 4+7i & 6 \end{bmatrix} \quad y \quad \overline{B^t} = \begin{bmatrix} 4 & -i & 3+2i \\ i & -3 & 4-7i \\ 3-2i & 4+7i & 6 \end{bmatrix} = B$$

luego, B es hermítica.

MATRIZ HEMIHERMÍTICA

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n se denomina *hemihermítica*, si y solo si

$\overline{A^t} = -A$; es decir:

$$\overline{a_{ji}} = -a_{ij}; \quad \forall i, j = \overline{1; n} \quad (2.22)$$

Para los elementos de la diagonal principal a_{kk} , $k = \overline{1; n}$ se tiene que:

$$\overline{a_{kk}} = -a_{kk} \leftrightarrow a_{kk} = 0 \vee a_{kk} = mi, \quad \text{donde } i = \sqrt{-1}$$

osea, éstos elementos deben ser nulos o imaginarios puros.

EJEMPLOS 29

$$* A = \begin{bmatrix} i & -2+i \\ 2+i & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \overline{A^t} = \begin{bmatrix} -i & -2-i \\ 2-i & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -i & 2-i \\ -2-i & 0 \end{bmatrix} = -A$$

luego, A es hemihermítica

$$* B = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 4+3i \\ -1-i & i & -3 \\ -4+3i & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \overline{B^t} = \begin{bmatrix} 0 & -1+i & -4-3i \\ 1+i & -i & 3 \\ 4-3i & -3 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

luego, B es hemihermítica.

Propiedades:

1. Si A es Hermítica, entonces kA es hermítica, $\forall k \in \mathbb{R}$ escalar
2. Si A es Hemihermítica, entonces kA es Hemihermítica, $\forall k \in \mathbb{R}$ escalar
3. Si A es una matriz cuadrada:

$A + \overline{A^t}$ es hermítica

$A - \overline{A^t}$ es hemihermítica

4. Toda matriz cuadrada A cuyos elementos son números complejos en general (reales, imaginarios o imaginarios puros), se puede expresar como la adición de una matriz hermítica y otra hemihermítica, así:

$$A = B + C$$

donde:

$$B = \frac{1}{2} (A + \overline{A^t})$$

$$C = \frac{1}{2} (A - \overline{A^t}).$$

EJEMPLO 30

Siendo la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n , demostrar que: $A + \overline{A^t}$ es hermítica y que $A - \overline{A^t}$ es hemihermítica.

* Sea $B = [b_{ij}] = A + \overline{A^t} = [a_{ij}] + [\overline{a_{ji}}] = [a_{ij} + \overline{a_{ji}}]$

donde: $b_{ij} = a_{ij} + \overline{a_{ji}} = \overline{\overline{a_{ji}} + a_{ij}} = \overline{b_{ji}}^{(1)}$; $\forall i, j = \overline{1; n}$

es decir: $B = \overline{B^t}$

Luego: $B = A + \overline{A^t}$ es hermítica.

* Sea $C = [c_{ij}] = A - \overline{A^t} = [a_{ij}] - [\overline{a_{ji}}] = [a_{ij} - \overline{a_{ji}}]$

Pero: $c_{ij} = a_{ij} - \overline{a_{ji}} = -(\overline{a_{ji}} - a_{ij}) = -\overline{c_{ji}}$; $\forall i, j = \overline{1; n}$

es decir: $C = -\overline{C^t}$

Luego: $C = A - \overline{A^t}$ es hemihermítica.

(1) De los NUMEROS COMPLEJOS, tenga en cuenta que:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad ; \quad \overline{\overline{z}} = z$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

3^{er} Capítulo

PERMUTACIONES

De "n" elementos, son todas las ordenaciones posibles que pueden obtenerse con todos los elementos.

EJEMPLO 31

Considerando el conjunto $\{1; 2; 3\}$, las permutaciones de éstos tres elementos son:

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

El número total de permutaciones que se pueden obtener con "n" elementos es $n!$. En el ejemplo anterior, con los 3 elementos se han obtenido en total $3! = 6$ permutaciones.

DECREMENTO

Dado un conjunto de "n" números enteros positivos y considerando una de sus permutaciones, se dice que en ésta existe un *decremento* cuando un número precede a otro menor que él.

EJEMPLO 32

Sea el conjunto $\{1; 2; 3; 4\}$ y las permutaciones:

- * 2143 tiene dos decrementos, el 2 precede al 1, el 4 al 3
- * 1324 tiene un decremento, el 3 precede al 2
- * 4321 tiene seis decrementos, el 4 precede al 3, el 4 al 2, el 4 al 1, el 3 al 2, el 3 al 1 y el 2 al 1.

TÉRMINO DE UNA MATRIZ CUADRADA

Dada una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden "n", se denomina *término* de ésta matriz a:

$$(-1)^d \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (3.1)$$

que contiene como factores solamente a un elemento de cada fila y uno de cada columna; además: $j_1; j_2; j_3; \dots j_n$ representan a cada uno de los números: $1; 2; 3; \dots; n$ - no

necesariamente en ese orden y "d" es el número de decrementos de la permutación $j_1 j_2 j_3 \dots j_n$ formada por los segundos subíndices.

EJEMPLO 32

Sea la matriz : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

son dos términos de ésta matriz :

* $(-1)^d \cdot a_{12} a_{23} a_{31} = + a_{12} a_{23} a_{31}$, donde los segundos subíndices forman la permutación : $j_1 j_2 j_3 = 231$, tiene $d = 2$ decrementos.

* $(-1)^d \cdot a_{13} a_{22} a_{31} = - a_{13} a_{22} a_{31}$, donde $j_1 j_2 j_3 = 321$ tiene $d = 3$ decrementos.

NÚMERO DE TÉRMINOS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Dada una matriz cuadrada : $A = [a_{ij}]$ de orden "n", el número de términos que se pueden obtener está dado por el número total de permutaciones de : $j_1 j_2 j_3 \dots j_n$, es decir $n!$, donde la mitad de ellos resultan con signo (+) y la otra mitad con signo (-).

A partir de una matriz cuadrada de orden 2, se pueden obtener $2! = 2$ términos; en una de orden 3 se pueden obtener $3! = 6$ y en una de orden 4 se pueden obtener $4! = 24$ términos.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Dada la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden "n", se denomina *determinante* de A -denotado por $|A|$ y se dice también de orden "n" - a la suma de todos los términos que se pueden obtener de dicha matriz, es decir :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{d_k} \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (3.2)$$

donde : d_k indica el número de decrementos en la permutación : $j_1 j_2 j_3 \dots j_n$ y que para cada d_k se considera una y sólo una de las permutaciones de : $j_1 j_2 j_3 \dots j_n$

DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN

Para la matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se tiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{d_1} \cdot a_{11} a_{22} + (-1)^{d_2} \cdot a_{12} a_{21}$$

pero : $d_1 = 0$ (la permutación 12 no tiene decrementos)

y $d_2 = 1$ (la permutación 21 tiene un decremento)

Luego:

$$|A| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (3.3)$$

EJEMPLO 33

$$* |A| = \begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix} = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 2$$

$$* |B| = \begin{vmatrix} \tan x & -\sec x \\ \cos x & \cot x \end{vmatrix} = \tan x \cdot \cot x - \cos x \cdot (-\sec x) = 1 - (-1) = 2$$

DETERMINANTE DE TERCER ORDEN

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{d_1} \cdot a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{d_2} \cdot a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^{d_3} \cdot a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{d_4} \cdot a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{d_5} \cdot a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{d_6} \cdot a_{13} a_{22} a_{31}$$

pero : $d_1 = 0$ (la permutación 123 no tiene decrementos)

$d_2 = 1$ (la permutación 213 tiene un decremento)

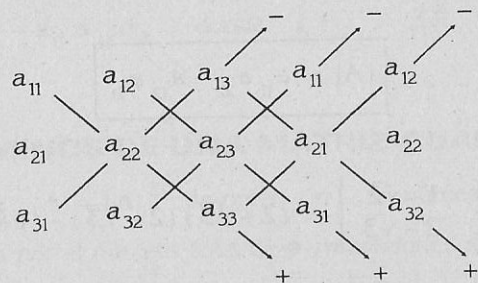
$d_3 = 2$ (la permutación 312 tiene dos decrementos) y así con los demás.

Luego:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (3.4)$$

REGLA DE SARRUS

Mediante esta regla se puede obtener el determinante anterior en forma rápida. Consiste en repetir la primera y segunda columna a continuación de la tercera. Se toma el producto de los tres elementos de la diagonal principal y también el de sus dos paralelas siguientes, cada uno con signo positivo; y luego el producto de los tres elementos de la diagonal secundaria y el de sus dos paralelas siguientes, pero cada uno con signo negativo, tal como lo muestra el esquema siguiente:



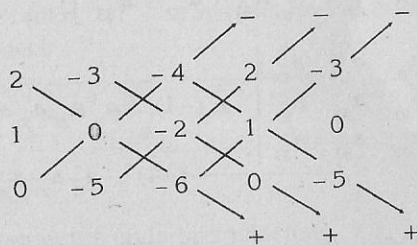
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \quad (3.5)$$

EJEMPLO 35

Hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

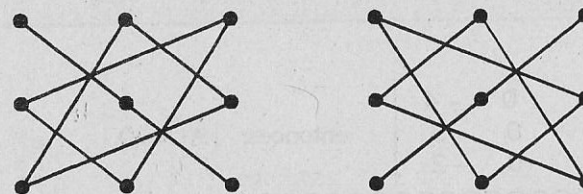
Preparando el esquema para la regla de Sarrus:



$$|A| = 2 \cdot 0 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-2) \cdot (-5) + (-4) \cdot 1 \cdot (-6) - 0 \cdot 0 \cdot (-4) - (-5) \cdot (-2) \cdot 2 - (-6) \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$|A| = 0 + 0 + 20 - 0 - 20 - 18 \rightarrow |A| = -18$$

En la práctica, se prescinde de volver a colocar las dos primeras columnas y las operaciones se efectúan como en el esquema adjunto. Cada punto representa a un elemento de la matriz inicial. Las líneas indican como deben efectuarse los productos correspondientes; tenga en cuenta que cada producto tiene a tres elementos como factores. Los términos obtenidos en la parte izquierda se toman con signo (+) y los que se obtienen por la parte derecha con signo (-).



(3.6)

EJEMPLO 36

Hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

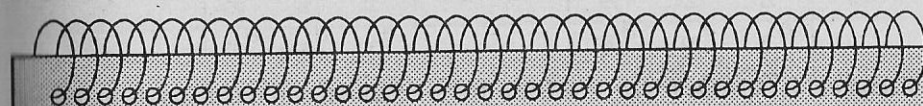
Operando como lo indica el esquema, se tiene:

$$|A| = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \cdot (-7) - (-7) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3$$

$$|A| = 6 + 4 + 42 + 7 - 4 + 36 = 91$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Considerando una matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n , se tiene que:



Propiedad:

La matriz A y su traspuesta A^T tienen igual determinante, es decir: $|A^T| = |A|$.

(3.7)

Las propiedades que se van a indicar a continuación se refieren a los elementos de una línea (fila o columna). Como consecuencia de ésta primera propiedad, cualquier otra que se aplique a filas, es también aplicable a columnas.

Propiedad:

Si los elementos de una línea (fila o columna) son nulos, el determinante es igual a cero.

EJEMPLO 37

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, entonces: $|A| = 0$

Propiedad:

Si B es la matriz que se obtiene a partir de A , luego de multiplicar a los elementos de una línea (fila o columna) por un escalar k ($k \neq 0$), entonces:

$$|B| = k \cdot |A|$$

EJEMPLO 38

Sean: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; $k \neq 0$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot |A|$$

En esencia, cuando los elementos de una línea (fila o columna) son múltiplos de un escalar k o contienen al factor k , se puede extraer éste k como factor del determinante.

EJEMPLO 39

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 20 \\ -7 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 10 \\ -7 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(3.8)

(3.9)

PROPIEDAD:

Sea la matriz: $B = k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]$, donde k es un escalar no nulo, entonces:

$$|B| = |k \cdot A| = k^n \cdot |A|$$

(3.10)

EJEMPLO 40

$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$, entonces:

$$|k \cdot A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k^3 \cdot |A|$$

No debe existir ninguna confusión entre ésta propiedad y la anterior; aquí el escalar k multiplica a la matriz, es decir a todos los elementos; y en el cálculo del determinante de la matriz así obtenida, de cada línea (fila o columna) se extrae el escalar k como factor del determinante.

PROPIEDAD:

Si B es otra matriz que se obtiene de A intercambiando dos de sus líneas paralelas cualesquiera (filas o columnas), entonces: $|B| = -|A|$

(3.11)

EJEMPLO 41

Sean: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$, donde las filas 1 y 3 de A se

han intercambiado, entonces: $|B| = -|A|$

PROPIEDAD:

Si B es la matriz que se obtiene de A trasladando una línea cualquiera " p " lugares, entonces: $|B| = (-1)^p \cdot |A|$

(3.12)

EJEMPLO 42

$$\text{Sean: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

donde B se obtiene trasladando la columna 1 de A "3" lugares, luego:

$$|B| = (-1)^3 \cdot |A|, \text{ es decir: } |B| = -|A|$$

PROPIEDAD:

Si en la matriz: $A = [a_{ij}]$, los elementos correspondientes de dos líneas paralelas cualesquiera (filas o columnas) son iguales, entonces: $|A| = 0$

(3.13)

EJEMPLO 43

$$\text{Sea: } A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \text{ donde la fila 1 es la misma que la fila 3, luego: } |A| = 0$$

PROPIEDAD:

Si en A , los elementos correspondientes de dos líneas paralelas cualesquiera (filas o columnas) son proporcionales, entonces: $|A| = 0$

(3.14)

EJEMPLO 44

donde los elementos de las columnas 1 y 2 son

$$\text{Sea: } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 6 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{proporcionales, así: } \frac{-2}{3} = \frac{6}{-9} = \frac{4}{-6}$$

Luego, en el determinante de A , sacando el factor (-2) de la primera columna y el factor 3 de la segunda, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 6 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \cdot 0 \rightarrow |A| = 0$$

Propiedad:

Si en la matriz $A = [a_{ij}]$ cada uno de los elementos de una cierta línea (fila o columna) por ejemplo la primera fila viene expresado como la adición de dos términos, así: $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$, para: $j = 1; n$; entonces el determinante de A se puede descomponer como la adición de otros dos determinantes.

(3.15)

Del siguiente modo:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{d_k} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad \text{donde: } a_{1j_1} = b_{1j_1} + c_{1j_1}, \text{ reemplazando:}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{d_k} (b_{1j_1} + c_{1j_1}) a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{d_k} b_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} + \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{d_k} c_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (3.16)$$

es decir: $|A| = \begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} & \dots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En alguna otra fila (o columna), cada uno de los elementos pudo estar expresado como la adición de dos términos, y no necesariamente en la primera; de modo análogo se habría descompuesto como la adición de dos determinantes. Generalizando, si todos los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) está expresado como la adición de "p" sumandos, el determinante de ésta matriz se puede descomponer como la adición de otros "p" determinantes.

EJEMPLO 45

$$\begin{vmatrix} a & m+n+p & d \\ b & q+r+s & e \\ c & t+u+v & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & m & d \\ b & q & e \\ c & t & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & n & d \\ b & r & e \\ c & u & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & p & d \\ b & s & e \\ c & v & f \end{vmatrix}$$

Propiedad:

Si la matriz B se obtiene de A, sumando a los elementos de una línea (fila o columna) los elementos correspondientes de otra línea paralela multiplicados por un escalar k (k ≠ 0), entonces: |B| = |A|.

(3.17)

EJEMPLO 46

Sean: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + qa_{23} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + qa_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + qa_{33} & a_{33} \end{bmatrix}$$

donde B_1 se obtiene de A; mediante la transformación: $f_1 + k f_2$ y B_2 mediante:

$c_2 + q c_3$ entonces: $|A| = |B_1| = |B_2|$

MATRIZ REGULAR Y MATRIZ SINGULAR

Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n

* A es una matriz regular si y sólo si: $|A| \neq 0$ (3.18)

* A es una matriz singular si y sólo si: $|A| = 0$ (3.19)

MENOR COMPLEMENTARIO DE UN ELEMENTO

Sea la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n, se denomina *menor complementario* de a_{ij} y se denota por $|M_{ij}|$, al determinante de la matriz de orden (n-1) que se obtiene al eliminar la i-ésima fila y j-ésima columna de la matriz A.

EJEMPLO 47

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

* El menor complementario $|M_{13}|$, eliminando la fila 1 y la columna 3 de A, es:

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 20 = -18$$

* El menor complementario $|M_{22}|$, eliminando la fila 2 y la columna 2 de A es:

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

* El menor complementario $|M_{32}|$, eliminando la fila 3 y la columna 2 de A es:

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -1$$

EJEMPLO 48

Considerando la matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

se tiene que: $* |M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}$

$* |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}$

$* |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}$

ADJUNTO DE UN ELEMENTO

Siendo la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n , el adjunto de a_{ij} , denotado por α_{ij} , es:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}| \quad (3.20)$$

EJEMPLO 49

* Para la matriz del ejemplo 47, considerando los menores complementarios, calculados:

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \cdot |M_{13}| = (+1)(-18) = -18$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |M_{22}| = (+1)(2) = 2$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \cdot |M_{32}| = (-1)(-1) = 1$$

EJEMPLO 50

Tomando una vez más la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$* \alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |M_{11}| = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}$$

$$* \alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23})$$

$$* \alpha_{13} = (-1)^{1+3} \cdot |M_{13}| = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}$$

Además, considerando éstos resultados, y el desarrollo (3.4), se tiene que:

$$|A| = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$|A| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$

Reemplazando convenientemente, resulta que:

$$|A| = a_{11} \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{12} + a_{13} \alpha_{13} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} \cdot \alpha_{1k} \quad (3.21)$$

Nótese que:

$a_{11}; a_{12}; a_{13}$ son los elementos de la primera fila y $\alpha_{11}; \alpha_{12}; \alpha_{13}$ son los adjuntos de dichos elementos respectivamente.

PROPIEDAD:

El determinante de la matriz $A = [a_{ij}]$ es igual a la sumatoria de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus respectivos adjuntos. (3.22)

Si se considera la i -ésima fila, se tiene:

$$|A| = a_{i1} \cdot \alpha_{i1} + a_{i2} \cdot \alpha_{i2} + a_{i3} \cdot \alpha_{i3} + \dots + a_{in} \cdot \alpha_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \alpha_{ik}$$

Si se considera la j -ésima columna:

$$|A| = a_{1j} \cdot \alpha_{1j} + a_{2j} \cdot \alpha_{2j} + a_{3j} \cdot \alpha_{3j} + \dots + a_{nj} \cdot \alpha_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot \alpha_{kj}$$

EJEMPLO 51

Para la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Con respecto a la segunda columna, aplicando la propiedad (3.21)

$$|A| = a_{12} \alpha_{12} + a_{22} \alpha_{22} + a_{32} \alpha_{32} = (-1) \cdot \alpha_{12} + 2 \cdot \alpha_{22} + 0 \cdot \alpha_{32}$$

Pero: $\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -13$; $\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$

α_{32} no es necesario calcularlo, puesto que: $a_{32} = 0$; luego:

$$|A| = (-1)(-13) + 2 \cdot 7 + 0 \cdot \alpha_{32}$$

donde: $|A| = 27$

Es ventajoso la aplicación de ésta propiedad para el cálculo de determinantes, sobretodo en matrices de orden mayor que 3; pero con el objeto de simplificar las operaciones, se recomienda considerar aquella línea (fila o columna) donde exista la mayor cantidad de elementos nulos (de ser necesario, emplear previamente las propiedades de los determinantes, tratando de obtener la mayor cantidad de elementos nulos en una misma línea).

EJEMPLO 52

Sea la matriz triangular superior $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

Tomando la primera columna: $|A| = a_{11} \alpha_{11} + 0 \cdot \alpha_{21} + 0 \cdot \alpha_{31}$

donde: $\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33}$ entonces: $|A| = a_{11} a_{22} a_{33}$

El determinante de la matriz triangular superior A es igual al producto de los elementos de su diagonal principal. Este detalle es importante, puesto que es posible obtener una matriz triangular superior (o puede ser inferior) a partir de una matriz cuadrada cualquiera, luego de aplicar las propiedades de los determinantes.

Propiedad:

El determinante de una matriz triangular, superior o inferior (o puede ser diagonal) siempre es igual al producto de los elementos de su diagonal principal. (3.23)

EJEMPLO 53

Calcular el determinante de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 12 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

Restando de cada fila la anterior, comenzando por la última, se obtiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 12 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Luego, por propiedad: $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Por otra parte, veamos lo que ocurre si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican por los correspondientes adjuntos de los elementos de otra línea paralela.

EJEMPLO 54

Para la matriz:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

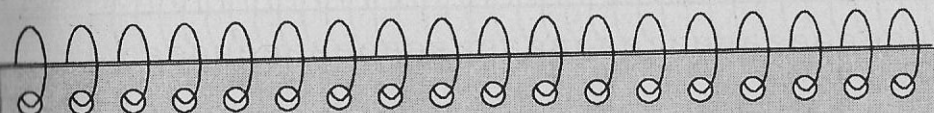
Anteriormente se calcularon los adjuntos de los elementos de la primera fila :

$$\alpha_{11} = a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23} ; \alpha_{12} = -(a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) \text{ y } \alpha_{13} = a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}$$

Multiplicando éstos por los correspondientes elementos de la tercera fila y sumando se tiene:

$$a_{31} \alpha_{11} + a_{32} \alpha_{12} + a_{33} \alpha_{13} = a_{31} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{32} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{33} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$

De donde: $a_{31} \alpha_{11} + a_{32} \alpha_{12} + a_{33} \alpha_{13} = 0$



PROPIEDAD :

Para la matriz cuadrada $A = [a_{ji}]$ de orden n , la sumatoria de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los correspondientes adjuntos de los elementos de otra línea paralela siempre es igual a cero.

Si se consideran la p -ésima y la q -ésima filas, se tiene que:

$$a_{p1} \alpha_{q1} + a_{p2} \alpha_{q2} + a_{p3} \alpha_{q3} + \dots + a_{pn} \alpha_{qn} = \sum_{k=1}^n a_{pk} \alpha_{qk} = 0 \quad (3.24)$$

O también si se consideran la p -ésima y la q -ésima columnas, se tiene que:

$$a_{1p} \alpha_{1q} + a_{2p} \alpha_{2q} + a_{3p} \alpha_{3q} + \dots + a_{np} \alpha_{nq} = \sum_{k=1}^n a_{kp} \alpha_{kq} = 0$$

Además:

$$* \quad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$* \quad |I_n| = 1$$

(3.25)

MATRIZ ADJUNTA Y MATRIZ INVERSA

4^{to} Capítulo

MATRIZ ADJUNTA

Dada una matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n , donde α_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij} , se define como la matriz adjunta de A y se denota por $ADJ(A)$ a :

$$ADJ(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (4.1)$$

Nótese que los adjuntos de los elementos de la fila j en A son los elementos de la columna j en $ADJ(A)$, o los adjuntos de los elementos de la columna i en A son los elementos de la fila i en $ADJ(A)$, es decir :

$$ADJ(A) = [\alpha_{ij}]^t = [\alpha_{ji}] \quad (4.2)$$

EJEMPLO 55

Para la matriz :
$$A = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |M_{11}| = q$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |M_{21}| = -n$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| = -p$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |M_{22}| = m$$

Luego :
$$ADJ(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & -n \\ -p & m \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 56

Para la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |M_{11}| = -13 \quad ; \quad \alpha_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |M_{21}| = 8$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \cdot |M_{31}| = -7 \quad ; \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| = -8$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |M_{22}| = 4 \quad ; \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2} \cdot |M_{32}| = -8$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \cdot |M_{13}| = 2 \quad ; \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |M_{23}| = -4$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \cdot |M_{33}| = 2$$

$$\text{Luego: } ADJ(B) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 8 & -7 \\ -8 & 4 & -8 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE DE LA MATRIZ ADJUNTA

Dada la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n y su correspondiente matriz adjunta:

$ADJ(A) = [\alpha_{ji}]$ también de orden n , se tiene:

$$A \cdot ADJ(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = ADJ(A) \cdot A$$

$$\text{de donde: } A \cdot ADJ(A) = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \alpha_{jk} \right] \quad (4.3)$$

Aplicando las propiedades (3.22) y (3.24), se obtiene que:

$$A \cdot ADJ(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = \text{DIAG}(|A|; |A|; |A|; \dots; |A|) \quad (4.4)$$

es decir:

$$A \cdot ADJ(A) = |A| \cdot I_n \quad (4.5)$$

Luego, tomando determinantes:

$$|A \cdot ADJ(A)| = ||A| \cdot I_n| \rightarrow |A| \cdot |ADJ(A)| = |A|^n \cdot |I_n|$$

$$\rightarrow |A| \cdot |ADJ(A)| = |A|^n$$

por lo tanto:

$$|ADJ(A)| = |A|^{n-1} \quad (4.6)$$

EJEMPLO 57

Hallar el determinante de la matriz adjunta de: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Se pide $|ADJ(A)|$ y para ésto no es necesario calcular la $ADJ(A)$, puesto que por la propiedad: (4.6) se tiene que:

$$|ADJ(A)| = |A|^{3-1} = |A|^2$$

$$\text{donde: } |A| = 9 - 8 - 8 - 1 - 48 - 12 = -68$$

$$\text{Luego: } |ADJ(A)| = (-68)^2 = 68^2$$

Por otra parte, si A es una matriz singular ($|A| = 0$) de (4.4) se deduce que:

$$A \cdot ADJ(A) = \text{DIAG}(|A|; |A|; |A|; \dots; |A|) = 0 \quad (\text{matriz nula}) \quad (4.7)$$

Propiedades:

1. $ADJ(AB) = ADJ(B) \cdot ADJ(A)$
2. $ADJ(k \cdot A) = k^{n-1} \cdot ADJ(A)$; $\forall k$ escalar no nulo y A de orden n .
3. $ADJ(ADJ(A)) = |A|^{n-2} \cdot A$; donde A es de orden n
4. Si A es una matriz cuadrada de orden 2: $ADJ(ADJ(A)) = A$

(4.8)

MATRIZ INVERSA

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n , tales que: $AB = BA = I$, entonces se dice que B es la *matriz inversa* de A y se denota así: $B = A^{-1}$; o también se dice que A es la *matriz inversa* de B y se denota así: $A = B^{-1}$.

Luego:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \vee \quad A^{-1} \cdot A = I \quad (4.9)$$

EJEMPLO 57

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 6-6 \\ -1+1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

De donde afirmamos que B es la matriz inversa de A , o sea:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = B$$

Asimismo, también A es la matriz inversa de B , así:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

EJEMPLO 59

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, hallar A^{-1}

Sea: $A^{-1} = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$, luego, por (4.9) se tiene: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = I$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 5m+3p & 5n+3q \\ 3m+2p & 3n+2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 5m+3p = 1 & 5n+3q = 0 \\ 3m+2p = 0 & 3n+2q = 1 \end{matrix}$$

resolviendo: $m = 2$; $n = -3$; $p = -3$; $q = 5$

entonces: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE UNA MATRIZ CUADRADA POSEA INVERSA

Por (4.5) se sabe que: $A \cdot ADJ(A) = |A| \cdot I$ (4.10)

y además por (4.9): $A \cdot A^{-1} = I$ (4.11)

De (4.10), considerando que $|A| \neq 0$, se tiene que: $A \cdot \frac{ADJ(A)}{|A|} = I$ (4.12)

de donde: $A^{-1} = \frac{ADJ(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot ADJ(A)$ (4.13)

Es decir, A^{-1} existe si y sólo si A es una matriz regular ($|A| \neq 0$); pero si A es una matriz singular ($|A| = 0$) se dice que A no posee inversa o no es inversible.

EJEMPLO 60

Hallar la inversa de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, si existe

$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$, $|A| \neq 0$, entonces A posee inversa, además:

$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (1) = 1$

$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (3) = -3$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (4) = 4$$

$$y: ADJ(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Por (4.13): } A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 61

Hallar la inversa de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, si existe

Por la propiedad (3.22), con respecto a la segunda fila, se tiene que:

$$|A| = 3(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3(-8) + 1 \cdot (-9) = -33; |A| \neq 0$$

entonces A posee inversa. Calculando la matriz adjunta de A :

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad \alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8; \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8; \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Luego: $ADJ(A) = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \\ 12 & -9 & -3 \end{bmatrix}$

entonces por (4.13): $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{33} & \frac{8}{33} & -\frac{1}{33} \\ \frac{1}{33} & \frac{2}{33} & \frac{8}{33} \\ -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$

PROPIEDADES:

Siendo A y B matrices regulares:

$$1. (k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}; \quad \forall k \text{ escalar no nulo}$$

$$2. (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$3. |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

$$4. ADJ(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} \cdot A$$

$$5. (A^{-1})^{-1} = A$$

(4.14)

MATRIZ AMPLIADA

Dadas dos matrices: $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ de orden $m \times p$ (osea, con el mismo número de filas), se denomina *matriz ampliada* a:

$$[A : B] = [a_{ij} : b_{ij}] \quad \text{de orden } m \times (n+p) \quad (4.15)$$

es decir:

$$[A : B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{array} \right]_{m \times (n+p)} \quad (4.16)$$

EJEMPLO 62

Si: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, entonces:

$$[A : B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right]$$

EJEMPLO 63

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces:}$$

$$[A : I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

PROPIEDAD :

Dada la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n ; si la matriz ampliada $[A : I_n]$, luego de la aplicación de un número finito de transformaciones de fila solamente, se expresa como otra matriz ampliada de la forma $[I_n : B]$, entonces B es la matriz inversa de A es decir: $B = A^{-1}$.

(4.17)

EJEMPLO 64

$$\text{Calcular la inversa de la matriz: } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por la propiedad (4.17)

$$[A : I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 - f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 - f_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 + 2f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{7}f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{7} \end{array} \right] = [I : B]$$

$$\text{Luego: } B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Compare el resultado obtenido con el del ejemplo 60.

EJEMPLO 65

$$\text{Calcular la inversa de la matriz: } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Por la propiedad (4.17):

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 + f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_2 - 3f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 7 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{15}f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ 0 & 9 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_3 - 9f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{5}{11}f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_1 - \frac{1}{3}f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{33} & \frac{8}{33} & -\frac{1}{33} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{33} & \frac{2}{33} & \frac{8}{33} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right] = [I : A^{-1}]$$

$$\text{Luego: } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{33} & \frac{8}{33} & -\frac{1}{33} \\ \frac{1}{33} & \frac{2}{33} & \frac{8}{33} \\ -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

, Compare este resultado con el del ejemplo 61.

Esta es una propiedad más adecuada para el cálculo de la inversa de una matriz, sobre todo si se trata de una matriz de orden mayor o igual que 3, en vista que las transformaciones a efectuar son sencillas.

Algunos autores denominan a esta propiedad como el método de GAUSS-JORDAN para el cálculo de la inversa de una matriz.

RECOMENDACIONES PARA FORMAR LA MATRIZ IDENTIDAD EN LA PARTE IZQUIERDA.

Empleando solamente transformaciones de fila, proceda así:

• Para empezar, forme la primera columna de la matriz identidad; el uno primero y luego los ceros siguientes.

• Luego forme la segunda columna de la matriz identidad; comenzando siempre con el uno y luego los ceros correspondientes.

Al calcular la inversa de una cierta matriz, mediante esta propiedad, no es necesario saber de antemano si la matriz es regular o singular. Cuando sea imposible formar la matriz identidad en la parte izquierda, (es decir, cuando los elementos en la parte izquierda de una cierta fila sean nulos), diremos que la inversa no existe.

EJEMPLO 66

Hallar la inversa de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

Aplicando la propiedad:

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 + f_1 \\ f_3 - 4f_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_3 + 3f_2 \\ \frac{1}{5}f_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -3 & -3 & -4 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{12}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 - 2f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{12}{5} \end{array} \right]$$

donde se observa que los tres primeros elementos de la tercera fila son nulos, con lo cual se hace imposible la formación de la matriz identidad en la parte izquierda. En conclusión, la matriz dada no tiene inversa. (tenga en cuenta que esto también significa que $|A| = 0$).

MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n se denomina ORTOGONAL, si y sólo si:

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I \quad (4.19)$$

EJEMPLO 67

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Luego: A es ortogonal.

De (4.19) se tiene que: $A \cdot A^t = I \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A^t = A^{-1} \cdot I \rightarrow I \cdot A^t = A^{-1} \cdot I$

De donde, si A es ortogonal entonces:

$$A^t = A^{-1} \vee A^{-1} = A^t \quad (4.20)$$

EJEMPLO 68

Averiguar si: $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ es ortogonal.

$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |C| = -1 \wedge \text{ADJ}(C) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -3 \\ -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{ADJ}(C) = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -3 \\ -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = C^t$$

Entonces: C es ortogonal.

Propiedades:

1. Si A es una matriz ORTOGONAL, entonces: $|A| = \pm 1$
2. Si A y B son matrices ORTOGONALES, entonces: AB es otra matriz ORTOGONAL.
3. Si A es una matriz ORTOGONAL, entonces:

$$A^t = A^{-1} \vee A^{-1} = A^t$$

4. Si A es una matriz ortogonal

A^t también es ortogonal

A^{-1} también es ortogonal

(4.21)

CARACTERÍSTICA O RANGO DE UNA MATRIZ

5^{to} Capítulo

SUBMATRICES CUADRADAS

Dada una matriz: $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$, se denomina submatriz cuadrada de orden r ($r \leq \min\{m; n\}$) a aquella que se obtiene luego de eliminar una o más líneas (filas y/o columnas) de la matriz A .

EJEMPLO 69

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ de orden 3×2

Siendo r el orden de una submatriz cuadrada: $r \leq \min\{3; 2\}$, es decir: $r \leq 2$

Las submatrices cuadradas de orden 2 son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Las submatrices cuadradas de orden 1 son:

$$[1]; [4]; [2]; [0]; [-1]; [3]$$

EJEMPLO 70

Sea la matriz: $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ de orden 3×4

En este caso, el orden de una submatriz cuadrada: $r \leq \min\{3; 4\}$, es decir: $r \leq 3$

Las submatrices cuadradas de orden 3 son:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Las submatrices cuadradas de orden 2 son:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \text{ etc}$$

sólo se han indicado seis submatrices cuadradas de orden 2, pero en total se pueden obtener 18. Las submatrices cuadradas de orden 1, son fáciles de indicar, como el lector habrá podido percatarse.

CARACTERÍSTICA O RANGO DE UNA MATRIZ

Dada una matriz: $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$, se llama *característica o rango* de la matriz A al orden de aquella submatriz cuadrada de mayor orden posible cuyo determinante sea distinto de cero; es decir, la característica de A es igual a r si al menos una de sus submatrices cuadradas de orden r tiene determinante no nulo, siendo los determinantes de las submatrices cuadradas de orden $r+1$ (si es que existen) todos nulos.

EJEMPLO 71

Hallar la característica de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

Como la matriz A es de orden 2×3 , tomaremos primero las submatrices cuadrada "más grandes", osea las de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

En vista que sus determinantes son nulos, entonces la característica no es 2. Tomando ahora las submatrices cuadradas de orden 1, vemos que, por ejemplo: $|3| = 3 \neq 0$. Luego A tiene característica $r = 1$.

EJEMPLO 72

Hallar la característica de la matriz: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

Considerando primero las submatrices cuadradas "más grandes", las de orden 3, vemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora, la submatrices cuadradas de orden 2; basta con encontrar una con determinante no

nulo, por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ y concluimos que la característica de A es

$$r = 2$$

Propiedades:

1. Si r es la característica de la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$, entonces:
$$r \leq \min \{m; n\}$$
2. Toda matriz cuadrada regular de orden n tiene característica: $r = n$,
puesto que su determinante es no nulo. (5.1)
3. La característica de una matriz nula es igual a cero.
4. Si A tiene característica igual a r , entonces la matriz ampliada $[A : 0]$ también tiene característica r , siendo 0 la matriz nula.
5. Si la matriz ampliada $[A : B]$ tiene característica igual a r , entonces la matriz A tiene característica menor o igual a r .

MATRICES EQUIVALENTES

Dos matrices A y B del mismo orden se dice que son *equivalentes* si una de ellas se obtiene de la otra como resultado de la aplicación de un número finito de transformaciones de línea (por lo general, de fila) y éstas además tienen la misma característica.

EJEMPLO 73

Hallar la característica de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Transformando la matriz A se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

La matriz B es equivalente a la matriz A .

En B , todas las submatrices cuadradas de orden 3 tienen determinante nulo, pero una de sus submatrices cuadradas de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ tiene determinante no nulo; luego la característica de B , y por consiguiente la de A , es $r = 2$.

Para hallar la característica de una matriz cualquiera es más sencillo calcularlo por medio de su matriz equivalente; en ésta puede observarse rápidamente a aquella submatriz cuadrada cuyo determinante es distinto de cero.

MATRIZ CANÓNICA

Una matriz $C = [c_{ij}]$ de orden $m \times n$ y cuya característica es r , se denomina canónica si satisface las siguientes condiciones:

- Uno o más elementos en cada una de las r primeras filas son distintos de cero, siendo nulos todos los elementos de las $m - r$ filas restantes.
- El primer elemento no nulo en cada una de las r primeras filas es la unidad; siendo, obviamente, nulos todos los elementos anteriores a éste.
- A partir de la segunda fila hasta la r -ésima, el número de elementos nulos anteriores a la unidad siempre debe ser mayor al de la fila anterior.
- En la columna a la cual pertenece el primer elemento no nulo de una cierta fila (osea la unidad), todos los demás elementos deben ser nulos.

EJEMPLO 74

Son matrices canónicas:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

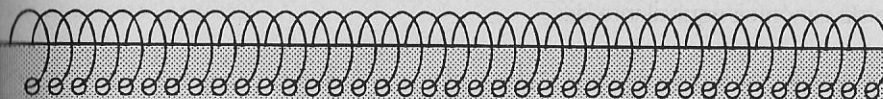
donde la característica de C_1 es $r = 2$, la de C_2 es $r = 3$ y la de C_3 es $r = 3$.

Nótese que éstas matrices satisfacen todas las condiciones anteriores.

En cambio, las siguientes matrices no son canónicas:

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C_4 no satisface la condición (b), C_5 no satisface las condiciones (c) y (d); y C_6 no satisface la condición (d). Pero, con algunas transformaciones elementales de fila, éstas se pueden llevar a matrices canónicas.



Propiedad:

Toda matriz A de orden $m \times n$ y de característica r necesariamente es equivalente a una matriz canónica C también de orden $m \times n$.

(5.2)

Esto significa que para hallar la característica de una matriz cualquiera A también podría hacerse con la matriz canónica equivalente con A ; por lo tanto, las transformaciones elementales (de fila) que se realicen tienen por objeto la obtención de una matriz canónica.

EJEMPLO 75

Hallar la matriz canónica equivalente de: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Transformando hasta obtener la matriz canónica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 2f_1 \\ f_4 - 5f_1 \\ f_5 - f_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \times f_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1 - 2f_2 \\ f_3 + 5f_2 \\ \sim \\ f_4 + 4f_2 \\ f_5 + 4f_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \sim -\frac{1}{10}f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} f_1 - 5f_3 \\ f_2 + 2f_3 \\ \sim \\ f_4 + 10f_3 \\ f_5 + 10f_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se podrá observar que la matriz canónica obtenida tiene característica $r = 3$, luego A también será de característica $r = 3$

EJEMPLO 76

Hallar la matriz canónica equivalente de:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Transformando:

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C \end{aligned}$$

Queda para el lector, determinar las transformaciones empleadas. De ésta última, la matriz C y por consiguiente B tienen característica $r = 3$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

6^{to} Capítulo

Un conjunto de una o más ecuaciones de primer grado con dos o más variables se denomina SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

EJEMPLO 77

Son sistemas lineales:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 17 \\ 2x - 5y = -4 \end{cases} ; \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases} ; \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \end{cases}$$

Un sistema, con m ecuaciones-lineales y n variables o incógnitas, tiene la siguiente forma general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = h_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases} \quad (6.1)$$

donde: $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$ son las variables o incógnitas del sistema.

a_{ij} , $(\forall i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n})$ son los coeficientes

y: $h_1 ; h_2 ; h_3 ; \dots ; h_m$, son los términos independientes en cada ecuación.

REPRESENTACION DE UN SISTEMA LINEAL MEDIANTE LA NOTACION MATRICIAL

El sistema anterior, se puede expresar, mediante matrices, así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Al efectuar la multiplicación del primer miembro se obtiene una matriz que al igualarla con la del segundo miembro se origina cada una de las ecuaciones del sistema lineal.

También, en forma abreviada, se puede representar así:

$$A \cdot X = H \quad (6.3)$$

donde: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, se llama matriz de los coeficientes.

$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^t$, se llama matriz de las incógnitas

y $H = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ \dots \ h_m]^t$, es la matriz de los términos independientes.

o también, mediante la matriz ampliada:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & h_m \end{array} \right] \quad (6.4)$$

donde cada una de las filas representa a una ecuación del sistema (para que el lector obtenga una ecuación del sistema, es suficiente con colocar convenientemente las incógnitas y los signos + e = en una cierta fila).

EJEMPLO 78

Para el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ y + 2z = 5 \\ x - 4y + z = 2 \end{cases}$$

su representación será:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad [A : H] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

SOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL

Se denomina solución del sistema lineal (6.1) a los valores de las variables o incógnitas: $X = (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$ que verifican en forma simultánea todas las ecuaciones del sistema.

Un sistema puede presentar una o más soluciones (SISTEMA COMPATIBLE) y en otros casos un sistema no tiene solución (SISTEMA INCOMPATIBLE). Cuando el sistema lineal tiene solución única se dice que es COMPATIBLE DETERMINADO y cuando tiene infinitas soluciones se dice que es COMPATIBLE INDETERMINADO.

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas lineales, exactamente con las mismas incógnitas, se dice que son equivalentes si y sólo si la solución de una es también la solución de la otra.

EJEMPLO 79

El sistema lineal:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \quad \text{cuya solución es: } x = 5 \ ; \ y = -3$$

es equivalente al sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

cuya solución es también: $x = 5 \ ; \ y = -3$

El proceso de resolución de un sistema lineal consiste en obtener a partir de éste un sistema equivalente, pero cuyas ecuaciones sean más sencillas que las iniciales. Usando la notación matricial, esto significa que a partir de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada debemos obtener otra matriz equivalente, empleando solamente transformaciones de fila.

Comparando ambos procesos, con algunos ejemplos, observaremos algo muy importante.

EJEMPLO 80

Resolver:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

Con las ecuaciones del sistema	Con la matriz ampliada
$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 4x + 3y = 11 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 3x + 2y = 9 \end{cases} \\ * (1) - (2) & \begin{cases} x + y = 2 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 3x + 2y = 9 \end{cases} \\ * (1) & \begin{cases} x + y = 2 \end{cases} \\ (2) - 3(1) & \begin{cases} -y = 3 \end{cases} \\ * (1) + (2) & \begin{cases} x = 5 \end{cases} \\ -(2) & \begin{cases} y = -3 \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc c} 4 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 9 \end{array} \right] \\ f_1 - f_2 & \sim \left[\begin{array}{cc c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{array} \right] \\ f_2 - 3f_1 & \sim \left[\begin{array}{cc c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \\ f_1 + f_2 & \sim \left[\begin{array}{cc c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \\ (-1)f_2 & \sim \left[\begin{array}{cc c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \end{aligned}$

EJEMPLO 81

Resolver:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Con las ecuaciones del sistema	Con la matriz ampliada
$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x + y + 2z = 8 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 2x - y + z = 1 \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} -x + 2y - z = 3 \end{cases} \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right]$
$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x + y + 2z = 8 \end{cases} \\ (2) - 2(1) & \begin{cases} -3y - 3z = -15 \end{cases} \\ (3) + (1) & \begin{cases} 3y + z = 11 \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f_2 - 2f_1 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 11 \end{array} \right] \\ f_3 + f_1 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 11 \end{array} \right] \end{aligned}$
$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x + y + 2z = 8 \end{cases} \\ -\frac{1}{3}(2) & \begin{cases} y + z = 5 \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} 3y + z = 11 \end{cases} \\ (1) - (2) & \begin{cases} x + z = 3 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} y + z = 5 \end{cases} \\ (3) - 3(2) & \begin{cases} -2z = -4 \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} -\frac{1}{3}f_2 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 11 \end{array} \right] \\ f_1 - f_2 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \\ f_3 - 3f_2 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \end{aligned}$
$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x + z = 3 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} y + z = 5 \end{cases} \\ -\frac{1}{2}(3) & \begin{cases} z = 2 \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f_3 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$
$\begin{aligned} (1) - (3) & \begin{cases} x = 1 \end{cases} \\ (2) - (3) & \begin{cases} y = 3 \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} z = 2 \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f_1 - f_3 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ f_2 - f_3 & \sim \left[\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$

Observe que en cada paso, tanto el sistema como la matriz que se obtiene luego de la transformación correspondiente, son equivalentes; además la última matriz es canónica.

Entonces, para resolver un sistema lineal, a partir de la matriz ampliada $[A : H]$ se debe obtener la matriz canónica equivalente, mediante transformaciones de fila, y en ésta última

se tiene la solución de dicho sistema.

EJEMPLO 82

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 3x - y - z = 8 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Usando la matriz ampliada:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & 5 & -2 & -9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 5 & -2 & -9 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Esta última matriz nos da la solución del sistema: $x = 3$; $y = -1$; $z = 2$ (para lo cual, lea cada fila como si fuese una ecuación del sistema).

EJEMPLO 83

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

De la matriz ampliada:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Luego: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

SISTEMA LINEAL NO HOMOGENEO

El sistema lineal: $A \cdot X = H$; $H \neq 0$ (6.5)

es no homogéneo; es decir cuando la matriz de los términos independientes H no es nula. Los sistemas de los ejemplos anteriores son de esta clase.

Siendo n el número de variables o incógnitas; se tiene que:

- El sistema es **COMPATIBLE**, cuando la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $[A : H]$ tienen la misma característica r .
 - Si $r = n$, entonces el sistema tiene **SOLUCION UNICA** (compatible determinado)
 - Si $r < n$, entonces el sistema tiene **INFINITAS SOLUCIONES** (compatible indeterminado). Además, en este caso, el sistema posee $(n - r)$ variables arbitrarias o independientes, es decir pueden tomar cualquier valor. Representando convenientemente estas variables arbitrarias, las otras r variables quedarán expresadas en función de aquellas.
- El sistema es **INCOMPATIBLE**; o no tiene solución, cuando la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $[A : H]$ tiene diferentes características.

EJEMPLO 84

Resolver:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Usando la matriz ampliada:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_1 - f_2 \\ f_3 + f_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De ésta última, A y $[A : H]$ tienen la misma característica $r = 2$ y además $n = 3$ (tres variables), entonces el sistema tiene infinita soluciones ($r < n$) con $n - r = 1$ variable arbitraria. También, de las dos primeras filas, obtenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= -1 & ; & & x_2 - 3x_3 &= 2, & \text{haciendo } x_3 = a, & \text{resulta:} \\ x_1 &= -2a - 1 & & & y & & x_2 &= 3a + 2 \end{aligned}$$

Luego la solución general del sistema es:

$$X = (x_1; x_2; x_3) = (-2a - 1; 3a + 2; a)$$

EJEMPLO 85

Resolver:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Con la matriz ampliada:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}f_2 \\ f_3 - 2f_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right]$$

De donde se observa que la característica de la matriz de coeficientes A es 2 y la característica de la matriz ampliada $[A : H]$ es 3; en consecuencia el sistema no tiene solución (es INCOMPATIBLE). De la última fila se desprende que: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 9$, es una ecuación que no tiene sentido, no se satisface para ningún $X = (x_1; x_2; x_3)$

SISTEMA LINEAL HOMOGENEO

El sistema lineal:

$$A \cdot X = 0$$

es homogéneo; es decir, cuando la matriz de los términos independientes H es nula ($H = 0$). Siendo el sistema de n incógnitas, es fácil deducir que la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $[A : 0]$ tienen la misma característica y por lo tanto el sistema siempre es compatible.

Para cualquier sistema lineal homogéneo, $X = 0$, osea:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

verifica siempre dicho sistema y se denomina **SOLUCION TRIVIAL**.

En vista que A y $[A : 0]$ son de igual característica, para resolver el sistema emplearemos solamente la matriz A . Si A tiene característica $r = n$, el sistema tiene solución única y ésta es la solución trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$; pero si A tiene característica $r < n$, el sistema tiene infinitas soluciones, donde una de ellas es la solución trivial (también se dice que el sistema tiene soluciones **NO TRIVIALES**).

(6.8)

EJEMPLO 86

Resolver:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Usando solamente la matriz de coeficientes A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}f_2 \\ -\frac{1}{4}f_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 - 2f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde la característica es $r = 3$ y también $n = 3$, luego el sistema tiene solución única, la trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

EJEMPLO 87

Resolver:
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Con la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 4f_1 \\ f_4 - 2f_1}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -7 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & -14 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}f_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & -14 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 - \frac{3}{2}f_2 \\ f_3 - 7f_2 \\ f_4 + 14f_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí, la característica de A es $r = 2$ y $n = 4$; entonces, como $r < n$, el sistema tiene infinitas soluciones. Además el sistema tiene $n - r = 4 - 2 = 2$ variables arbitrarias. Luego, de la matriz equivalente a A, se tiene que:

$$x_1 + \frac{5}{14}x_3 + \frac{1}{14}x_4 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 - \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4 = 0, \text{ haciendo: } x_3 = a \text{ y } x_4 = b \text{ resulta que: } x_1 = -\frac{5}{14}a - \frac{1}{14}b \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4}{7}a + \frac{5}{7}b$$

Luego, la solución general es:
$$X = \left(-\frac{5}{14}a - \frac{1}{14}b; \frac{4}{7}a + \frac{5}{7}b; a; b \right)$$

REGLA DE CRAMER

Dado el sistema lineal no homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas:

$$A \cdot X = H \quad (6.9)$$

es decir, A es una matriz cuadrada de orden n ; la condición necesaria y suficiente para que

dicho sistema tenga solución única es que A sea de característica $r = n$, es decir: $|A| \neq 0$, y la solución del sistema esta dada por:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} ; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} ; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} ; \dots ; x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \quad (6.10)$$

EJEMPLO 88

Resolver:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Por la regla de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 ; \text{ como } |A| \neq 0, \text{ el sistema tiene solución única.}$$

$$\text{Luego: } |A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 ; |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 ;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

Observe que A_1 se obtuvo de A reemplazando su primera columna por la de los términos independientes (H); A_2 al reemplazar la segunda columna por H y A_3 la tercera columna también por H .

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{12}{6} = 2 \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-12}{6} = -2 \end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

NIVEL BASICO

PROBLEMA 1

Si: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Hallar: Traza (AB)

Resolución:

Como A y B son conformes a la multiplicación, sea: $C = AB = [\alpha_i \beta_j]_{3 \times 3}$ donde:

α_i es la i -ésima fila de A

β_j es la j -ésima columna de B

Entonces: Traza (AB) = $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$

$$\text{Traza } (AB) = (8 - 2) + (-8 - 2) + (0 + 3) = -1$$

$$\boxed{\text{Traza de } (AB) = -1}$$

PROBLEMA 2

Cuáles son verdaderas:

- Si: A es involutiva: $A^{51} = I$
- Si A es idempotente: $A^{48} = A$
- Si $n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$ y $A^n = I$, entonces A es periódica

Resolución:

(I) A es involutiva $\rightarrow A^2 = I$, de donde:

$A^n = I$, si n es par y $A^n = A$, si n es impar.

Entonces (I) es Falsa.

(ver 2.13)

(II) A es idempotente $\rightarrow A^2 = A$, de donde:

(ver 2.11)

$$A^n = A, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 2$$

Entonces (II) es Verdadera.

(III) Si $A^n = I, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \rightarrow A$ es periódica

(ver 2.10)

Entonces (III) es Verdadera.

II y III son verdaderas

PROBLEMA 3

Demostrar que: A es involutiva $\leftrightarrow (I - A)(I + A) = 0$

Resolución:

* Suponiendo que A es involutiva, es decir: $A^2 = I$

$$\text{Entonces: } I - A^2 = 0 \rightarrow I - A + A - A^2 = 0$$

$$\text{Acomodando: } I \cdot I - A \cdot I + I \cdot A - A \cdot A = 0$$

$$\text{Por propiedad (1.11-2): } (I - A)I + (I - A)A = 0 \rightarrow (I - A)(I + A) = 0$$

$$\text{* Si: } (I - A)(I + A) = 0 \rightarrow (I - A)I + (I - A)A = 0$$

$$\rightarrow I \cdot I - A \cdot I + I \cdot A - A \cdot A = 0$$

$$I - A^2 = 0 \rightarrow I = A^2 \vee A^2 = I \rightarrow A \text{ es Involutiva.}$$

$$A \text{ es involutiva} \longleftrightarrow (I - A)(I + A) = 0$$

PROBLEMA 4

$$\text{Sean las matrices: } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix}$$

Si A y B son permutables respecto a la multiplicación. Calcular los valores de m y n .

Resolución:

Si son permutables, entonces: $AB = BA$, es decir:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2m - n & -3 \\ 3m + n & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m + 3 & -m + 1 \\ 2n + 15 & -n + 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{De donde: } -3 = -m + 1 \rightarrow m = 4$$

$$8 = -n + 5 \rightarrow n = -3$$

con los cuales se puede comprobar que:

$$2m - n = 2m + 3 \rightarrow n = -3$$

$$3m + n = 2n + 15 \rightarrow 3m - n = 15 \rightarrow m = 4$$

$$m = 4 \wedge n = -3$$

PROBLEMA 5

Si: $AB = A$ y $BA = B$

Demostrar que: A y B son Idempotentes

Resolución:

$$\text{* } AB = A \rightarrow ABA = A \cdot A \rightarrow A(BA) = A^2 \rightarrow AB = A^2$$

$$\rightarrow A = A^2 \text{ ó } A^2 = A, \text{ Luego } A \text{ es idempotente.}$$

$$\text{* } BA = B \rightarrow BAB = B \cdot B \rightarrow B(AB) = B^2 \rightarrow BA = B^2$$

$$\rightarrow B = B^2 \text{ ó } B^2 = B, \text{ Luego } B \text{ es Idempotente.}$$

A y B son Idempotentes

PROBLEMA 6

Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que: $A = xM + yN$; $y \neq 0$

en donde M es la matriz Identidad y N es una matriz en la cual los elementos de la diagonal principal son nulos y los demás son unos.

Hallar un valor para la suma de los escalares x e y , si se sabe que A es involutiva.

Resolución:

Recuerda que, por la propiedad demostrada en el problema 3:

$$A \text{ es involutiva} \leftrightarrow (I + A)(I - A) = 0 \text{ ó } (A + I)(A - I) = 0$$

donde: $A = xM + yN = xI + yN$, Reemplazando:

$$[(x + 1)I + yN][(x - 1) + yN] = 0$$

$$\begin{bmatrix} x+1 & y & y \\ y & x+1 & y \\ y & y & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 & y & y \\ y & x-1 & y \\ y & y & x-1 \end{bmatrix} = 0, \text{ Efectuando}$$

$$\begin{bmatrix} x^2+2y^2-1 & 2xy+y^2 & 2xy+y^2 \\ 2xy+y^2 & x^2+2y^2-1 & 2xy+y^2 \\ 2xy+y^2 & 2xy+y^2 & x^2+2y^2-1 \end{bmatrix} = 0$$

De donde: $x^2+2y^2-1=0$

$$2xy+y^2=0, \text{ pero } y \neq 0$$

$$\rightarrow 2x+y=0 \rightarrow y=-2x$$

$$x^2+2(-2x)^2-1=0$$

$$9x^2=1 \rightarrow x=\frac{1}{3} \vee x=-\frac{1}{3}$$

Entonces: $\left(x=\frac{1}{3} \wedge y=-\frac{2}{3}\right) \vee \left(x=-\frac{1}{3} \wedge y=\frac{2}{3}\right)$

Luego:

$$x+y=-\frac{1}{3} \vee x+y=\frac{1}{3}$$

PROBLEMA 7

Demostrar que las matrices: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$

Son permutables; $\forall a; b; c; d$

Resolución:

Siendo: $P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$

Se desea demostrar que: $PQ = QP$

$$PQ = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix}$$

$$QP = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & bc+ad \\ ad+bc & bd+ac \end{bmatrix}$$

Luego: $PQ = QP \rightarrow P$ y Q son conmutables o permutables

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \text{ son conmutables o permutables.}$$

PROBLEMA 8

Siendo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Calcular: AB y BA

Resolución:

$$* AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (Matriz Nula)}$$

Nótese que: $AB = 0$ no implica que necesariamente: $A = 0$ ó $B = 0$.

$$* BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

De donde: $AB \neq BA$, en forma general.

PROBLEMA 9

Sean las Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que: $AB = AC$

Resolución:

Efectuando cada multiplicación:

$$* AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$* \quad AC = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$AB = AC$$

Además, como se puede observar, $AB = AC$ no necesariamente implica que $B = C$; lo que ya se indicó anteriormente en (1.11-7)

PROBLEMA 10

Demostrar que:

- * $\text{Traza}(A+B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$
- * $\text{Traza}(kA) = k \cdot \text{Traza}(A)$, $\forall k$ escalar no nulo

Resolución:

Siendo: $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ de orden n , se sabe que:

$$\text{Traza}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$* \quad \text{Traza}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii}$$

Luego:

$$\text{Traza}(A+B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

$$* \quad \text{Traza}(kA) = \sum_{i=1}^n (ka_{ii}) = k \sum_{i=1}^n (a_{ii})$$

Luego:

$$\text{Traza}(kA) = k \cdot \text{Traza}(A)$$

PROBLEMA 11

Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Calcular: $(A+B)^2$ y A^2+B^2

Resolución:

Calculemos previamente A^2 y B^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A \rightarrow A^2 = A$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = B \rightarrow B^2 = B$$

Además, observe que: $A+B = I$

Luego: $(A+B)^2 = I^2 = I$

$$A^2+B^2 = A+B = I$$

PROBLEMA 12

Considerando la matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas.

- I. $A^n = I \leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$ es par
- II. $A^n = A \leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$ es impar
- III. $AB = BA \leftrightarrow A = B$, donde B es de orden 2
- IV. $|A^n + I| = 0 \rightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$ es par
- V. $|A^n - I| = 0 \rightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$ es impar

Resolución:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$* \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \rightarrow A^2 = I \rightarrow A \text{ es involutiva}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A \quad ; \quad A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A \quad ; \quad A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$$

En general: $A^n = I$; si n es un número par

$A^n = A$; si n es un número impar

Luego: (I) es Verdadera

(II) es Verdadera

* Sea: $B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ tal que: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -m & -n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & n \\ -p & q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -m = -m \quad ; \quad \forall m \\ -n = n \quad \rightarrow \quad n = 0 \\ p = -p \quad \rightarrow \quad p = 0 \\ q = q \quad ; \quad \forall q \end{array}$$

Por lo que: $B = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$

Entonces (III) no es verdadera

* Anteriormente se vio que: $A^n = I$ si n es par $\rightarrow A^n + I = 2I$
 $\rightarrow |A^n + I| = |2I| = 2^n$

Entonces (IV) no es verdadera:

* También: $A^n = A$ si n es impar $\rightarrow A^n - I = A - I$
 $\rightarrow |A^n - I| = |A - I| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Entonces (V) es verdadera

3 son verdaderas

PROBLEMA 13

Si: $I - A$ es una matriz regular y A es antisimétrica, demostrar que: $I + A$ es también regular.

Resolución:

$I - A$ es regular y A es antisimétrica, entonces:

$|I - A| \neq 0 \wedge A^t = -A$ de donde: $|(I - A)^t| \neq 0 \wedge A = -A^t$

* $(I - A)^t = [I + (-A)]^t = I^t + (-A)^t = I + (-A^t)$

$\rightarrow (I - A)^t = I + A \rightarrow |(I - A)^t| = |I + A|$

como $|(I - A)^t| \neq 0$, también: $|I + A| \neq 0$

$I + A$ es regular

(ver (2.15))

PROBLEMA 14

Dada la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden 5, averiguar si le pertenecen los términos:

* $a_{13} a_{24} a_{23} a_{41} a_{35}$

* $a_{21} a_{13} a_{34} a_{55} a_{42}$

Resolución:

Para la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$; $\forall i; j = \overline{1;5}$ acomodando los factores en cada término:

* $a_{13} a_{23} a_{24} a_{35} a_{41}$

Este término no pertenece a A , porque a_{23} y a_{24} son elementos de una misma fila.

* $a_{13} a_{21} a_{34} a_{42} a_{55}$

Este término, sin tomar en cuenta su signo, si pertenece a A . El signo debe ser $(-)$ pues la permutación: 31425 tiene 3 decrementos.

Sólo el segundo pertenece a A

PROBLEMA 15

Dada la matriz cuadrada de orden 6: $A = [a_{ij}]$, averiguar el signo con que resultan los términos:

* $a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{14} a_{65}$

* $a_{32} a_{43} a_{14} a_{51} a_{66} a_{25}$

Resolución:

Para la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$; $\forall i; j = \overline{1;6}$ ordenando los elementos en cada término:

* $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{65}$

Considerando la permutación de los segundos subíndices: 431265, ésta tiene 6 decrementos; luego el término tiene signo $(+)$. (ver 3.1)

* $a_{14} a_{25} a_{32} a_{43} a_{51} a_{66}$

Para la permutación de los segundos subíndices: 452316, ésta tiene 8 decrementos; entonces el término tiene signo $(+)$. (ver 3.1)

El signo de los términos es $(+)$

PROBLEMA 16

Elegir p y q de tal manera que el término: $-a_{1p} a_{32} a_{4q} a_{25} a_{53}$, pertenezca a la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden 5.

Resolución:

Para la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$; $\forall i; j = \overline{1; 5}$

Un término cualquiera es: $(-1)^d \cdot a_{ij_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$

Donde d es el número de decrementos en la permutación: $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5$. Comparando

con el término dado: $(-1)^d \cdot a_{ij_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} = -a_{1p} a_{25} a_{32} a_{4q} a_{53}$

Observando los segundos subíndices: $p52q3 = 15243 \vee p52q3 = 45213$

De donde: $d = 4$ (no cumple) $\vee d = 7$ (si cumple)

$$p = 4 \quad y \quad q = 1$$

PROBLEMA 17

$$\text{Calcular: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Resolución:

Restando la segunda fila de las demás; luego, a la segunda sumarle el doble de la primera:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix}$$

Luego por la propiedad (3.23) : $|A| = (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)$

$$|A| = -2(n-2)!$$

PROBLEMA 18

$$\text{Calcular: } |A| = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Observe que el determinante es de orden $n+1$; efectuando las siguientes operaciones:

$c_1 - a_1 c_{n+1}$; $c_2 - a_2 c_{n+1}$; $c_3 - a_3 c_{n+1}$ y así sucesivamente, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Luego; por la propiedad (3.23)

$$|A| = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \dots (x-a_n)$$

PROBLEMA 19

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

Resolución:

Restando la primera fila de las demás, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)$$

$$\boxed{|A| = (n-1)!}$$

PROBLEMA 20

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix}$

Resolución:

Realizando las siguientes transformaciones:

$c_4 - a c_3$; $c_3 - a c_2$; $c_2 - a c_1$; se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 1-a^4 & 0 & 0 \\ x & a^3-ax & 1-a^4 & 0 \\ y & z-ay & a^3-az & 1-a^4 \end{vmatrix}$$

Luego por la propiedad (3.23)

$$\boxed{|A| = (1-a^4)^3}$$

PROBLEMA 21

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

Resolución:

Efectuando las siguientes transformaciones:

$c_1 - c_2$; $c_2 - c_3$; $c_3 - c_4$ y $c_4 - c_5$, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$\boxed{|A| = 5! = 120}$$

PROBLEMA 22

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$

Resolución:

Efectuando las siguientes operaciones: $c_1 - c_2$ y $c_3 - c_4$; luego, sacando el factor x de la primera columna y el factor z de la tercera columna, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z & 1 \\ 0 & 1 & z & 1-z \end{vmatrix} = x \cdot z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

Ahora: $f_2 - f_1$ y $f_4 - f_3$; para luego: $c_2 - c_3$

$$|A| = x \cdot z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = x \cdot z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{vmatrix}$$

$$|A| = x \cdot z (-x) (-z)$$

$$|A| = x^2 z^2$$

PROBLEMA 23

$$\text{Calcular: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Sumando todas las columnas en la primera y luego, sacando factor común, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila de las demás y luego: $f_3 - 2f_2$ y $f_4 + f_2$ resulta:

$$|A| = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-4)$$

$$|A| = 160$$

PROBLEMA 24

$$\text{Hallar: } |A| = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Resolución:

Sumando todas las filas a la primera y luego sacando factor común de ésta, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Restando la primera columna de las otras:

$$|A| = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$$

$$\text{Luego: } |A| = (a+b+c)(-a-b-c)(-a-b-c)$$

$$|A| = (a+b+c)^3$$

PROBLEMA 25

Los números 204; 527 y 255 son múltiplos de 17, entonces demostrar que el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Es también múltiplo de 17.

Resolución:

$$\text{Teniendo en cuenta que: } 204 = 17 \cdot 12$$

$$527 = 17 \cdot 31$$

$$255 = 17 \cdot 15$$

En el determinante, efectuando la siguiente transformación: $c_3 + (10^2 \cdot c_1 + 10 \cdot c_2)$, resulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 10^2 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 4 \\ 5 & 2 & 10^2 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 7 \\ 2 & 5 & 10^2 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix}$$

Extrayendo el factor 17 de la tercera columna:

$$\Delta = 17 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$\Delta = 17 \cdot k ; k \in \mathbb{Z}$$

PROBLEMA 26

Resolver la ecuación:
$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Asumiendo que: $ab + bc > ac$

Resolución:

Desarrollando por la regla de Sarrus, teniendo en cuenta que el producto de los elementos de la diagonal secundaria y el de sus dos paralelas son nulos, se obtiene:

$$(x-a)(x-c)(x+b) + (x+a)(x+c)(x-b) = 0$$

$$x^3 + (-a-c+b)x^2 + (ac-ab-bc)x + abc + x^3 + (a+c-b)x^2 + (ac-ab-bc)x - abc = 0$$

Luego; reduciendo: $2x^3 + 2(ac-ab-bc)x = 0 \rightarrow 2x(x^2 + ac - ab - bc) = 0$

$x = 0 \vee x^2 = ab + bc - ac$; pero del dato: $ab + bc - ac > 0$

$$x = 0 \vee x = \pm \sqrt{ab + bc - ac}$$

PROBLEMA 27

Resolver la ecuación:
$$\begin{vmatrix} x+c & x & x & x \\ x & x+c & x & x \\ x & x & x+c & x \\ x & x & x & x+c \end{vmatrix} = 9c^4$$

Resolución:

Sumando todas las columnas a la primera y luego sacando factor común, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 4x+c & x & x & x \\ 4x+c & x+c & x & x \\ 4x+c & x & x+c & x \\ 4x+c & x & x & x+c \end{vmatrix} = 9c^4 \rightarrow (4x+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & x+c & x & x \\ 1 & x & x+c & x \\ 1 & x & x & x+c \end{vmatrix} = 9c^4$$

Restando la primera fila de las demás, se obtiene:

$$(4x+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 9c^4 \rightarrow \begin{cases} (4x+c)c^3 = 9c^4 \\ 4x+c = 9c \end{cases}$$

$$x = 2c$$

PROBLEMA 28

Resolver la ecuación de "x"

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Resolución:

Efectuando: $f_4 - cf_1$, se tiene:

por (3.22) con respecto a c_3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x-c & -c & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow - \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ x-c & -c & -c \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la regla de Sarrus: $ab(x-c) + bcx + acx = 0$

Luego:

$$x = \frac{abc}{ab+bc+ac}$$

PROBLEMA 29

Resolver el sistema y dar el valor de x_2 :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_2 + 2x_3 = -8 \\ -x_3 + 2x_1 = 5 \end{cases}$$

Resolución:

Usando la matriz ampliada, se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1+f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -12 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -3 & 17 \end{array} \right] \sim$$

$$\xrightarrow{f_3+4f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5}f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2-2f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

De la segunda fila: $-x_2 = -14$

$$x_2 = 14$$

PROBLEMA 30

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Resolución:

Mediante la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1-f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2-2f_1, f_3-2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_3 \times f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1+f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim$$

$$\xrightarrow{f_1-f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Luego:

$$x = 2 ; y = -2 ; z = 3$$

PROBLEMA 31

Resolver el sistema lineal Homogéneo:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolución:

Usando sólo la matriz de coeficientes del sistema; se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1-f_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2-3f_1, f_3-f_1} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3-f_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-7}f_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1-3f_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como ésta matriz tiene característica $r = 2$ ($r < 3$), el sistema tiene solución distinta de la trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, la cual se obtiene así:

De la última matriz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 & \text{Haciendo: } x_3 &= a \\ x_2 - x_3 &= 0 & x_1 &= -a \wedge x_2 = a \end{aligned}$$

$$[x_1 ; x_2 ; x_3] = [-a ; a ; a]$$

PROBLEMA 32

Si el sistema:
$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + (4a+2)z = 1 \\ 2x + ay + 5z = 2 \\ 3x + ay + 7z = b \end{cases}$$

Tiene solución única, ¿qué valores admiten a y b ?

Resolución:

Empleando la matriz ampliada y transformándola, se obtiene:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4a+2 & 1 \\ 2 & a & 5 & 2 \\ 3 & a & 7 & b \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 - f_1 \\ f_3 - 2f_1 \\ f_4 - 3f_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & b-3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{f_3 - af_2 \\ f_4 - af_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & b-3 \end{array} \right] \xrightarrow{f_4 - f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array} \right]$$

Como el sistema tiene $n = 3$ variables o incógnitas, y además solución única, entonces la matriz de coeficientes y la matriz ampliada deben tener igual característica $r = n = 3$ y para esto: $1 - 4a^2 \neq 0 \wedge b - 3 = 0$

$$a \neq \pm \frac{1}{2} \wedge b = 3$$

PROBLEMA 33

Calcular el valor de k para que el sistema:
$$\begin{cases} x + (1+k)y = 0 \\ (1-k)x + ky = 1+k \\ (1+k)x + (12-k)y = -(1+k) \end{cases}$$

Sea compatible

Resolución:

El sistema tiene 2 variables ($n = 2$) y la matriz ampliada es de orden 3. Para que la característica de ésta sea $r = n = 2$ ($r < 3$), pues el sistema es compatible, entonces el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 1-k & k & 1+k \\ 1+k & 12-k & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{f_2 + f_3} \begin{vmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 2 & 12 & 0 \\ 1+k & 12-k & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{f_1 \times \frac{1}{2}f_2} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1+k & 0 \\ 1+k & 12-k & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & k-5 & 0 \\ 1+k & 6-7k & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (k-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7k-6 & k+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{f_3 - (7k-6)f_2} (k-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k-5)(k+1) = 0$$

$$k = 5 \vee k = -1$$

PROBLEMA 34

De acuerdo al número de sus soluciones, el sistema:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + 8z = 6 \end{cases}$$

Se califica como:

Resolución:

Empleando la matriz ampliada y transformándola, resulta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 - f_1 \\ f_3 - 5f_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -6 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{f_3 + 6f_2 \\ f_1 - f_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema posee $n = 3$ variables. Se observa que la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tienen la misma característica $r = 2$; pero $r < n$, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones, o sea es compatible indeterminado.

compatible indeterminado

PROBLEMA 35

Si el sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + 4y + az = b \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones. Calcular: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

Resolución:

Para que el sistema tenga infinitas soluciones, la característica de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada deben ser iguales a r y además $r < 3$. Empleando la matriz ampliada, se obtiene:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a & b \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 - f_1 \\ f_3 - 2f_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & b \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & a-2 & b \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_1 - f_2 \\ f_3 - 2f_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & a-1 & b+1 \end{array} \right]$$

Luego: $r < 3 \Leftrightarrow a-1 = 0 \wedge b+1 = 0 \rightarrow a = 1 \wedge b = -1$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$$

PROBLEMA 36

Hallar la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz X que satisface la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Sea: $X = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$

Luego:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m+5p & 2n+5q \\ m+3p & n+3q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde: $2m+5p = 4$ $2n+5q = -6$

$m+3p = 2$ $n+3q = 1$

Resolviendo: $m = 2$; $n = -23$; $p = 0$; $q = 8$

Se pide:

$$m + q = 10$$

PROBLEMA 37

Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Calcular: $\text{Traza}(A) + \text{Traza}(A^{-1})$

Resolución:

* $\text{Traza}(A) = 1 + 2 + 3 = 6$

* $\text{Traza}(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{ii} \right)$, dado que: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{ADJ}(A)$

$|A| = 6$; $\alpha_{11} = 6$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{33} = 2$

Luego: $\text{Traza}(A^{-1}) = \frac{1}{6} (6 + 3 + 2) = \frac{11}{6}$

$$\text{Traza}(A) + \text{Traza}(A^{-1}) = \frac{47}{6}$$

PROBLEMA 38

Cuántos valores de " m " hacen que el sistema:
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

Sea incompatible.

Resolución:

Con la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ m & -3m & 2m+3 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 - mf_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ 0 & -3m - m^2 & m+3 \end{array} \right]$$

para que el sistema sea incompatible, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada deben tener características diferentes, para lo cual:

$$-3m - m^2 = 0 \quad \wedge \quad m+3 \neq 0$$

De donde: $m = 0$

Un sólo valor de m

PROBLEMA 39

Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hallar la suma de los elementos de A^{40} .

Resolución:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot I$$

Luego: $A^4 = A^3 \cdot A = 6 \cdot I \cdot A = 6A$

$$A^5 = A^4 \cdot A = 6 \cdot A \cdot A = 6A^2$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = 6 \cdot A^2 \cdot A = 6 \cdot A^3 = 6 \cdot 6 \cdot I = 6^2 \cdot I$$

De igual modo: $A^9 = 6^3 \cdot I$

$$A^{12} = 6^4 \cdot I$$

Entonces: $A^{39} = 6^{13} \cdot I$

Luego: $A^{40} = A^{39} \cdot A = 6^{13} \cdot I \cdot A = 6^{13} \cdot A$

$$A^{40} = 6^{13} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La suma de sus elementos: $S = 6^{13} (1 + 2 + 3)$

$$S = 6^{14}$$

PROBLEMA 40

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

Cuando "n" es un número entero positivo muy grande, ¿A qué valor se aproxima la suma de los elementos de la diagonal de A^n ?

Resolución:

$$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^2} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \frac{1}{3^2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^3} \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^4} \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \frac{1}{3^4} \cdot \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^5} \begin{bmatrix} 122 & 121 \\ 121 & 122 \end{bmatrix}$$

En general:

$$A^n = \frac{1}{3^n} \begin{bmatrix} 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 3 + 2 & 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 3 + 1 \\ 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 3 + 1 & 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 3 + 2 \end{bmatrix}$$

Siendo S la suma de los elementos de la diagonal principal, se tiene:

$$S = \frac{2}{3^n} [3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 3 + 2]$$

$$S = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \right]$$

Si n es muy grande, entonces:

$$S = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \right] = 2 \left[\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right] = 1$$

$$S = 1$$

PROBLEMA 41

Dada la matriz: $J = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$

siendo $n \in \mathbb{Z}^+$, Hallar: J^{4n} y J^{4n+1}

Resolución:

Siendo α es un escalar no nulo: $\frac{J}{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left(\frac{J}{\alpha}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$\left(\frac{J}{\alpha}\right)^3 = \left(\frac{J}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{J}{\alpha}\right) = (-I) \cdot \left(\frac{J}{\alpha}\right) = -\frac{J}{\alpha}$$

$$\left(\frac{J}{\alpha}\right)^4 = \left(\frac{J}{\alpha}\right)^3 \left(\frac{J}{\alpha}\right) = \left(-\frac{J}{\alpha}\right) \left(\frac{J}{\alpha}\right) = -\left(\frac{J}{\alpha}\right)^2 = -(-I) = I$$

Luego: $\frac{J}{\alpha}$ es periódica, cuyo período es 4.

Entonces:

$$\left(\frac{J}{\alpha}\right)^{4n} = \frac{1}{\alpha^{4n}} \cdot J^{4n} = I \quad J^{4n} = \alpha^{4n} \cdot I$$

$$\left(\frac{J}{\alpha}\right)^{4n+1} = \frac{1}{\alpha^{4n+1}} \cdot J^{4n+1} = \frac{J}{\alpha} \rightarrow J^{4n+1} = \alpha^{4n+1} \cdot \frac{J}{\alpha}$$

$$J^{4n+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha^{4n+1} \\ \alpha^{4n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^{4n} = \begin{bmatrix} \alpha^{4n} & 0 \\ 0 & \alpha^{4n} \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 42

Hallar el valor de k , de manera que el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} (1-k)x + y - z = 0 \\ 2x - ky - 2z = 0 \\ x - y - (1+k)z = 0 \end{cases}$$

Tenga soluciones no triviales.

Resolución:

La matriz de coeficientes del sistema debe tener características $r < 3$, luego:

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 & -1 \\ 2 & -k & -2 \\ 1 & -1 & -1-k \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1-k \\ 2 & -k & -2 \\ 1-k & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1-k \\ 0 & 2-k & 2k \\ 1-k & 1 & -1-k \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - (1-k)f_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1-k \\ 0 & 2-k & 2k \\ 0 & 0 & -k^2-2k \end{bmatrix}$$

Entonces, para que $r < 3$: $-k^2 - 2k = 0$

$$k = 0 \vee k = -2$$

PROBLEMA 43

Si es sistema lineal:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + (1+c)x_2 = -1 \\ (1-c)x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

Tiene solución única, el valor de x_1 es:

Resolución:

Si el sistema de dos variables ($n = 2$) tiene solución única entonces, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada deben tener la misma característica $r = n = 2$; luego:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1+c & -1 \\ 1-c & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-3 & -3 \\ 0 & 1+2c & 1+c \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{f_3 - (1-c)f_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-3 & -3 \\ 0 & 1+2c & 1+c \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{1}{c-3}f_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{c-3} \\ 0 & 1+2c & 1+c \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{f_1 - 2f_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 + \frac{6}{c-3} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{c-3} \\ 0 & 0 & 1+c + \frac{3(1+2c)}{c-3} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Entonces: $1+c + \frac{3(1+2c)}{c-3} = 0 \rightarrow c^2 + 4c = 0 \rightarrow c = 0 \vee c = -4$

Si $c = 0 \rightarrow x_1 = -1$

Si $c = -4 \rightarrow x_1 = \frac{1}{7}$

$$\boxed{x_1 = -1 \vee x_1 = \frac{1}{7}}$$

PROBLEMA 44

Para qué valores de "m", el sistema:
$$\begin{cases} x + y = m \\ ax + by = m^2 \\ a^2x + b^2y = m^3 \end{cases}$$

es compatible.

Resolución:

Empleando la matriz ampliada, con las transformaciones señaladas, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & m \\ a & b & m^2 \\ a^2 & b^2 & m^3 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 - af_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & m \\ 0 & b-a & m(m-a) \\ 0 & b^2-a^2 & m(m^2-a^2) \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{b-a}f_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & \frac{m(m-a)}{b-a} \\ 0 & b^2-a^2 & m(m^2-a^2) \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_3 - (b^2-a^2)f_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & \frac{m(m-a)}{b-a} \\ 0 & 0 & m(m^2-a^2) - m(m-a)(b+a) \end{array} \right]$$

Como el sistema de dos variables es compatible y la matriz de coeficientes tiene característica $r = 2$, entonces la matriz ampliada también debe ser de característica $r = 2$, y para esto:

$$m(m^2-a^2) - m(m-a)(b+a) = 0 \rightarrow m(m-a)(m-b) = 0$$

Es decir: $m = 0 \vee m = a \vee m = b$

Observe que;

para $m = 0$: $x = y = 0$

para $m = a$: $x = a \wedge y = 0$

para $m = b$: $x = 0 \wedge y = b$

PROBLEMA 45

En el sistema:
$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Qué valores deben asumir a y b para que:

i) Exista solución única

ii) Las soluciones dependan de una variable

iii) Las soluciones dependen de dos variables

iv) No exista solución

Resolución:

Empleando la matriz ampliada:

$$[A : H] = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 \times f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 - f_1, f_3 - af_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & b-ab & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 + f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & b-a \end{array} \right]$$

El sistema es de tres variables ($n = 3$); luego, si r es la característica de la matriz ampliada, se tiene:

(i) El sistema tiene solución única si y sólo si la matriz de coeficientes también tiene características r y además: $r = 3$, y para esto:

$$(2+a)(1-a) \neq 0 \rightarrow a \neq 1; -2$$

(ii) Las soluciones dependen de una variable o el sistema tiene una variable arbitraria, si la matriz de coeficientes tiene también característica r , además $r = 2$; para lo cual se deben cumplir:

$$(2+a)(1-a) = 0 \vee b-a = 0 \wedge a-1 \neq 0$$

$$\rightarrow a = b = -2$$

(iii) Las soluciones dependen de dos variables, o el sistema tiene dos variables arbitrarias, si la matriz de coeficientes también tiene característica r , y además $r = 1$; y para esto:

$$(2+a)(1-a) = 0 \wedge b-a = 0 \wedge b(a-1) = 0 \wedge 1-a = 0 \wedge b-1 = 0$$

$$\rightarrow a = b = 1$$

(iv) El sistema no tiene solución, si la matriz de coeficientes tiene característica menor que r , para lo cual:

$$(2+a)(1-a) = 0 \wedge b-a \neq 0$$

$$(a = -2 \vee a = 1) \wedge b \neq a$$

NIVEL INTERMEDIO

PROBLEMA 46

Dadas las matrices regulares A y B de orden n ; si A y B son permutables, demostrar que también son permutables:

- (a) A^{-1} y B
 (b) A y B^{-1}
 (c) A^{-1} y B^{-1}

Resolución:

Se sabe que: $AB = BA$ (son permutables)

$$(a) A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1} \rightarrow (A^{-1}A)BA^{-1} = A^{-1}B(AA^{-1})$$

$$I \cdot BA^{-1} = A^{-1}B \cdot I \rightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$$

Luego:

$$A^{-1} \text{ y } B \text{ son permutables}$$

$$(b) B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1} \rightarrow B^{-1}A(BB^{-1}) = (B^{-1}B)AB^{-1}$$

$$B^{-1}A \cdot I = I \cdot AB^{-1} \rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$$

Luego:

$$A \text{ y } B^{-1} \text{ son permutables}$$

$$(c) A^{-1}B^{-1}(AB)A^{-1}B^{-1} = A^{-1}B^{-1}(BA)A^{-1}B^{-1}$$

$$A^{-1}(B^{-1}A)(BA^{-1})B^{-1} = A^{-1}(B^{-1}B)(AA^{-1})B^{-1}$$

$$A^{-1}(AB^{-1})(A^{-1}B)B^{-1} = A^{-1}(I)(I)B^{-1}$$

$$(A^{-1}A)B^{-1}A^{-1}(BB^{-1}) = A^{-1}B^{-1}$$

$$I \cdot B^{-1}A^{-1} \cdot I = A^{-1}B^{-1} \rightarrow B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

Luego:

$$A^{-1} \text{ y } B^{-1} \text{ son permutables}$$

PROBLEMA 47

Si A es una matriz involutiva, demostrar que:

* $\frac{1}{2}(I+A)$ y $\frac{1}{2}(I-A)$ son idempotentes

$$* \frac{1}{2}(I+A) \cdot \frac{1}{2}(I-A) = 0$$

Resolución:

Por condición del problema: $A^2 = I$

Con las propiedades: $A \cdot I = I \cdot A = A \wedge I^n = I$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que:

$$* \left[\frac{1}{2}(I+A) \right]^2 = \frac{1}{2}(I+A) \cdot \frac{1}{2}(I+A) = \frac{1}{4}(I+A)(I+A) = \frac{1}{4}(I+2A+A^2)$$

$$= \frac{1}{4}(I+2A+I) = \frac{1}{4}(2I+2A) = \frac{2}{4}(I+A)$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{2}(I+A) \right]^2 = \frac{1}{2}(I+A) \rightarrow \frac{1}{2}(I+A) \text{ Es idempotente}$$

La demostración es análoga para $\frac{1}{2}(I-A)$ (queda para el lector)

$$\text{Si: } A^2 = I \rightarrow \frac{1}{2}(I+A) \text{ y } \frac{1}{2}(I-A) \text{ son idempotentes}$$

$$* \frac{1}{2}(I+A) \cdot \frac{1}{2}(I-A) = \frac{1}{4}(I+A)(I-A) = \frac{1}{4}[(I+A)I - (I+A)A]$$

$$= \frac{1}{4}[I^2 + A - A - A^2] = \frac{1}{4}[I - A^2] = \frac{1}{4}[I - I] = \frac{1}{4} \cdot 0$$

Luego:

$$\text{Si: } A^2 = I \rightarrow \frac{1}{2}(I+A) \cdot \frac{1}{2}(I-A) = 0$$

PROBLEMA 48

Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas de orden n , la condición necesaria y suficiente para que A y B sean permutables es que $A + kI$ y $B + kI$ también lo sean, $\forall k$ escalar no nulo.

Resolución:

* Asumiendo que $AB = BA$; siendo k un escalar no nulo:

$$(A + kI)(B + kI) = A(B + kI) + kI(B + kI) = AB + kAI + kIB + k^2I^2$$

$$= BA + kIA + BkI + kI \cdot kI$$

$$= (B + kI)A + (B + kI)kI = (B + kI)(A + kI)$$

Luego: $A + kI$ y $B + kI$ son permutables

* Asumiendo ahora que $A + kI$ y $B + kI$ son permutables $\forall k$ escalar no nulo:

$$(A + kI)(B + kI) = (B + kI)(A + kI)$$

$$A(B + kI) + kI(B + kI) = B(A + kI) + kI(A + kI)$$

$$AB + kAI + kIB + k^2I^2 = BA + kBI + kIA + k^2I^2$$

$$AB + kA + kB + k^2I = BA + kB + kA + k^2I$$

$$AB = BA$$

Luego A y B son permutables

$$A \text{ y } B \text{ son permutables} \leftrightarrow A + kI \text{ y } B + kI \text{ son permutables ; } \forall k \neq 0$$

PROBLEMA 49

Si A es una matriz nilpotente de índice 2, demostrar que: $A(I \pm A)^n = A$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Resolución:

Teniendo en cuenta que: $A \cdot I = I \cdot A = A$, se tiene:

$$(I \pm A)^2 = I \pm 2A + A^2$$

$$(I \pm A)^3 = I \pm 3A + 3A^2 \pm A^3$$

$$(I \pm A)^n = I \pm nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 \pm \dots + (-1)^n \cdot A^n ; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{pero, } A^2 = 0 \rightarrow A^p = 0 ; \forall p \in \mathbb{Z}^+ \wedge p \geq 2$$

$$\text{Luego: } (I \pm A)^n = I \pm nA$$

$$A(I \pm A)^n = A(I \pm nA) = AI \pm n \cdot A \cdot A = A \pm nA^2 = A \pm 0 = A$$

$$\text{Si: } A^2 = 0 \rightarrow A(I \pm A)^n = A ; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

PROBLEMA 50

Hallar todas las matrices de orden 4 que sean permutables con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Sea la matriz cuadrada: $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$

Tal que: $AB = BA$, donde:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & i & j & k \\ 0 & m & n & p \end{bmatrix}$$

Igualando: $e = i = m = n = p = 0$

$f = a; g = b; h = c; e = j = 0; f = k = q = a; g = l = b$

Luego:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a; b; c; d$$

PROBLEMA 51

Sabiendo que: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Calcular: $\text{Traza}(A^{-4})$

donde: A^{-1} : Inversa de la matriz A

Resolución:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Si: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = -1 \wedge \text{ADJ}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Entonces: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{ADJ}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = A^{-2} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -10 & -17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-4} = A^{-3} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -10 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 41 \end{bmatrix}$$

Luego: $\text{Traza}(A^{-4}) = -7 + 41 = 34$

$$\boxed{\text{Traza}(A^{-4}) = 34}$$

PROBLEMA 52

Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Encontrar la matriz M si: $M = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n; n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$

Resolución:

Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Entonces: $M = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = \begin{bmatrix} n & -1-2-3-\dots-n \\ 0 & n \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} n & -\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 53

Sea la matriz: $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

y el polinomio: $P_{(X)} = X^{34} - 2X^9 + I$

Hallar la sumatoria de los elementos de la matriz: $P_{(B)}$

Resolución

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = -I \cdot B = -B$$

$$B^5 = B^4 \cdot B = -B \cdot B = -B^2$$

$$B^6 = B^5 \cdot B = -B^2 \cdot B = -B^3 = -(-I) = I$$

Luego B es una matriz periódica de período 6, de donde:

$$B^{34} = B^{30} \cdot B^4 = I \cdot B^4 = B^4 = -B$$

$$B^9 = B^6 \cdot B^3 = I \cdot B^3 = B^3 = -I$$

Entonces: $P_{(B)} = B^{34} - 2B^9 + I = -B - 2(-I) + I$

$$P_{(B)} = -B + 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sum p_{ij} = 5$$

PROBLEMA 54

Sabiendo que: $F_{(X)} = X^2 - (a+d)X + ad - bc$

Determine la suma de los elementos de $F_{(A)}$ donde: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Resolución

$$F_{(X)} = X^2 - (a+d)XI + adI^2 - bcl$$

$$F_{(X)} = X^2 - aXI - dXI + adI^2 - bcl$$

$$F_{(X)} = (X - al)X - (X - al)dl - bcl$$

$$F_{(X)} = (X - al)(X - dl) - bcl$$

Luego: $F_{(A)} = (A - al)(A - dl) - bcl$

$$F_{(A)} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$F_{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum f_{ij} = 0$$

PROBLEMA 55

Hallar el período de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolución:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Luego: $A^4 = A^3 \cdot A = A$

$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2$

$A^6 = A^5 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = I$; En general: $A^3 = I$

El periodo de la matriz A es 3.

PROBLEMA 56

Si: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; Hallar: A^{-1}

Resolución:

Por propiedad: $A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \frac{1}{4^3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$|A| = \frac{1}{4^3} (-2 + 4 + 3 - 6 - 4 + 1) \rightarrow |A| = -\frac{1}{16}$$

También si: $A = \frac{1}{4} B$ y es de orden 3 $\rightarrow \text{ADJ}(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ADJ}(B)$

donde: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\text{ADJ}(B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

Como: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{ADJ}(A)$, reemplazando se tiene que:

$$A^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{16}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 57

Si la característica de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & x+2 & (x+2)^2 \\ 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{bmatrix}$

No es igual a 3, Calcular un valor de x

Resolución

Sabemos que en una matriz cuadrada A de orden n y característica r :

$$r < n \leftrightarrow |A| = 0$$

Por otro lado: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)$

Se denomina determinante de Vandermonde de orden 3. Luego, en el problema, la característica r de la matriz A no es 3, es decir $r < 3$, entonces:

$$|A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x+2 & (x+2)^2 \\ 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - 2x)(2x - x - 2) = 0$$

$\rightarrow x(x+1)(x-2)^3 = 0$; de donde:

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

PROBLEMA 58

Calcular: $|A| =$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ a & x & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ a & a & x & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{vmatrix}$$

Resolución:

Considerando el determinante de orden n ; sumando todas las columnas a la primera, luego sacando el factor que se repite en la primera columna, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x+(n-1)a & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ 1 & x & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ 1 & a & x & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila de las demás, resulta:

$$|A| = [x+(n-1)a] \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \cdot (x-a)^{n-1}$$

$$|A| = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

PROBLEMA 59

Calcular: $|A| =$

$$\begin{vmatrix} -a+b+c & a-b+c & a+b-c \\ a-b+c & a+b-c & -a+b+c \\ a+b-c & -a+b+c & a-b+c \end{vmatrix}$$

Resolución:

Sumando todas las filas en la primera y también: $f_2 + f_3$, luego extrayendo los factores comunes, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2a & 2b & 2c \\ a+b-c & -a+b+c & a-b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b-c & -a+b+c & a-b+c \end{vmatrix}$$

Ahora $f_3 - f_2$:

$$|A| = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b-c & c-a & a-b \end{vmatrix}; \text{ por la regla de Sarrus:}$$

$$|A| = 2(a+b+c)[b(a-b)+a(c-a)+c(b-c)-b(b-c)-a(a-b)-c(c-a)]$$

$$|A| = 4(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$$

$$|A| = 4(3abc - a^3 - b^3 - c^3)$$

PROBLEMA 60

Calcular: $|A| =$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} & 1 & \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \\ \cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} & \cos \frac{2\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Tener en cuenta que: $\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{CiS} \alpha$; $\operatorname{CiS} \alpha \cdot \operatorname{CiS} \beta = \operatorname{CiS}(\alpha + \beta)$
y $\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{CiS}(-\alpha)$, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \text{CiS } \frac{\pi}{3} & \text{CiS } \frac{\pi}{4} \\ \text{CiS } (-\frac{\pi}{3}) & 1 & \text{CiS } \frac{2\pi}{3} \\ \text{CiS } (-\frac{\pi}{4}) & \text{CiS } (-\frac{2\pi}{3}) & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 + \text{CiS } \frac{\pi}{3} \text{CiS } \frac{2\pi}{3} \text{CiS } (-\frac{\pi}{4}) + \text{CiS } (-\frac{\pi}{3}) \text{CiS } (-\frac{2\pi}{3}) \text{CiS } \frac{\pi}{4} -$$

$$- \text{CiS } (-\frac{\pi}{4}) \text{CiS } (\frac{\pi}{4}) - \text{CiS } (-\frac{\pi}{3}) \text{CiS } \frac{\pi}{3} - \text{CiS } (-\frac{2\pi}{3}) \text{CiS } \frac{2\pi}{3}$$

$$|A| = 1 + \text{CiS } \frac{3\pi}{4} + \text{CiS } (-\frac{3\pi}{4}) - \text{CiS } 0 - \text{CiS } 0 - \text{CiS } 0$$

$$|A| = 1 + \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} - 1 - 1 - 1$$

Luego, reemplazando el valor del cos, resulta:

$$|A| = -\sqrt{2} - 2$$

PROBLEMA 61

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & . & . & . & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -a & a & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a \end{vmatrix}$

Resolución:

Se observa que el determinante es de orden n ; sumando todas las columnas a la primera, resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} na + \frac{(n-1)nh}{2} & a+h & a+2h & . & . & . & a+(n-1)h \\ 0 & a & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -a & a & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a \end{vmatrix}_n$$

Desarrollando el determinante, por propiedad, con respecto a la primera columna:

$$|A| = \left[na + \frac{(n-1)nh}{2} \right] \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a & a & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -a & a & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$|A| = \left[na + \frac{(n-1)nh}{2} \right] \cdot a^{n-1}$$

PROBLEMA 62

Calcular el determinante de la matriz de orden n

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Multiplicando cada columna, a partir de la segunda por 2; 3; 4; ... ; n respectivamente; (recuerde que el determinante quedará dividido entre $2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$). Luego, a cada columna a partir de la segunda restándole la anterior, se obtiene:

$$|A| = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{vmatrix}$$

De donde: $|A| = \frac{1}{n!} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots \cdot (n+1) = \frac{1}{n!} \cdot (n+1)!$

$$|A| = n+1$$

PROBLEMA 63

Calcular: $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{-3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{-3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{-3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\sqrt{-3} \end{vmatrix}$

Resolución:

Haciendo: $\sqrt{-3} = a$; y efectuando $c_1 - c_2$, para luego realizar $f_1 - f_2$, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{vmatrix}$$

Desarrollando con respecto a la primera columna; por la propiedad (3.22):

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} - (a+1) \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -2(a^3 + 1 + 1 - a + a + a) - (a+1)(a+1) \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -2(a^3 + a + 2) + (a+1)^2(a^2 + 1), \text{ factorizando:}$$

$$\Delta = (a^2 - 1)(a^2 + 3); \text{ pero: } a = \sqrt{-3} \rightarrow a^2 = -3$$

Reemplazando:

$$\Delta = 0$$

PROBLEMA 64

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$

Resolución:

Considerando al determinante de orden n ; primero, multiplicando por x la primera fila y la primera columna; luego, sumando todas las columnas a la primera, se obtiene lo siguiente:

$$|A| = \frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ x & 0 & x & \dots & x & x \\ x & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & 0 & x \\ x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x & x \\ (n-1)x & 0 & x & \dots & x & x \\ (n-1)x & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)x & x & x & \dots & 0 & x \\ (n-1)x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Sacando el factor $(n-1)x$, luego restando a cada fila la primera resulta:

$$|A| = \frac{(n-1)x}{x^2} \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{n-1}{x} \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

Luego: $|A| = \frac{n-1}{x} \cdot (-x)^{n-1}$

$$|A| = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) x^{n-2}$$

PROBLEMA 65

Calcular el valor del determinante de orden n : $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Resolución:

Sumando todas las columnas en la primera; luego sacando el factor $(n-1)$, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila de las demás, resulta:

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \rightarrow |A| = (n-1) \cdot (-1)^{n-1}$$

$$|A| = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$$

PROBLEMA 66

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$

Resolución

Nótese que el determinante es de orden $(n+1)$. Agregando la primera fila a la segunda; luego la segunda que resulte agregarla a la tercera; la tercera resultante a la cuarta y así, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1$$

PROBLEMA 67

Calcular: $|A| =$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Nótese que el determinante es de orden $n+1$; sumando todas las columnas a la primera, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la propiedad (3.22) con respecto a la primera columna

$$|A| = (n+1)(-1)^{n+2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = (-1)^{n+2} \cdot (n+1) \cdot a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

PROBLEMA 68

Calcular: $|A| =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Efectuando las siguientes transformaciones: $f_2 - f_1$; $f_3 - 2f_1$ y $f_4 - 2f_1$ y

luego sacando un factor de f_2 , se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = (1-x^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

Ahora realizando: $f_3 - f_2$ y $f_4 - f_2$; para luego efectuar: $f_4 - f_3$:

$$|A| = (1-x^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = (1-x^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix}$$

Luego: $|A| = (1-x^2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (4-x^2)$

$$|A| = -3(x^2-1)(x^2-4)$$

PROBLEMA 69

Calcular: $|A| =$

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

Resolución:

Por propiedad, desarrollando con respecto a la primera columna, asumiendo que la matriz es de orden n

$$|A| = x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}$$

Cada una de las matrices que se observan son triangulares y son de orden $n-1$, luego:

$$|A| = x \cdot (x^{n-1}) + (-1)^{n+1} \cdot y \cdot (y^{n-1})$$

$$|A| = x^n + (-1)^{n+1} \cdot y^n$$

PROBLEMA 70

Calcular: $|A| =$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Resolución:

El determinante es de orden n . Sacando el factor a_1 de la primera columna, a_2 de la segunda, a_3 de la tercera y así sucesivamente. Luego, sumando todas las columnas a la última, se tiene:

$$|A| = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} + 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando respecto a la última columna:

$$|A| = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + 1 \right) \cdot (-1)^{n+n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + 1 \right)$$

PROBLEMA 71

Calcular x al resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Resolución:

Aplicando el procedimiento empleado en el problema 59, donde: $a = 1 \wedge n = 5$

se obtiene: $(x+4)(x-1)^4 = 0$

$$x = -4 \vee x = 1$$

PROBLEMA 72

Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & a_4 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 + a_4 - x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix} = 0$$

Resolución:

Restando la primera fila de las demás, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 - x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} - x \end{vmatrix} = 0$$

Luego: $a_1(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \dots (a_{n-1} - x) = 0$

$$x = a_1 \vee x = a_2 \vee x = a_3 \vee x = a_3 \vee \dots \vee x = a_{n-1}$$

PROBLEMA 73

Encontrar el valor de x para que el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Sea menor que 4.

Resolución:

Para la matriz cuadrada A de orden 4 y característica r :

$$r < 4 \Leftrightarrow |A| = 0$$

Luego, en el determinante de A , sumando todas las filas a la primera y posteriormente sacando factor común, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2x+1 & 2x+1 & 2x+1 & 2x+1 \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (2x+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Efectuando: $f_3 - f_1$; $f_4 - xf_2$ y sacando factor común x de f_2 ; y luego

$f_3 - (x-1)f_2$ y $f_4 + xf_2$, resulta:

$$x(2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & x-1 & x-1 & -1 \\ 0 & -x & 1-x & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x(2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \frac{x-1}{x} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Cambiando f_4 con f_3 y también cambiando de signo, se tiene:

$$x(2x+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\frac{x-1}{x} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x(2x+1)\left(1+\frac{x-1}{x}\right) = 0$$

$$(2x+1)(2x-1) = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}}$$

PROBLEMA 74

Calcular la característica de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Resolución:

Realizando transformaciones hasta obtener la matriz canónica: $\frac{1}{2}f_1$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_3 - 2f_1 \\ f_4 + 2f_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_3 - f_2 \\ f_4 - 2f_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 - f_3 \\ f_4 - 2f_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

La matriz canónica C tiene característica $r = 3$; luego, A también tiene característica:

$$\boxed{r = 3}$$

PROBLEMA 75

Resolver:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_n = 3 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = n \end{cases}$$

Resolución:

Empleando la matriz ampliada y restando la primera fila de las demás, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & n \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{array} \right]$$

Ahora sumando todas las filas a la primera resulta:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{array} \right]$$

Finalmente: $x_1 = 1 + \frac{(n-1)n}{2}$

$$-x_2 = 1$$

$$-x_3 = 2$$

$$-x_4 = 3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Luego: $-x_n = n-1$

$$x_1 = 1 + \frac{(n-1)n}{2} \wedge x_2 = -1 \wedge x_3 = -2 \wedge x_4 = -3 \dots \wedge x_n = -(n-1)$$

PROBLEMA 76

Resolver:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

Resolución:

El sistema tiene $n = 5$ variables o incógnitas; usando la matriz ampliada se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1 \\ f_4 - 4f_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}f_2 \\ \frac{1}{6}f_3 \\ \frac{1}{9}f_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_1 + f_2 \\ f_3 - f_2 \\ f_4 - f_2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Donde la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen la misma característica $r = 2$; $r < n$, el sistema tiene infinitas soluciones, luego habrán $n - r = 5 - 2 = 3$ variables independientes o incógnitas arbitrarias.

Eligiendo $x_3 = a$; $x_4 = b$ y $x_5 = c$

Entonces, de las dos primeras filas, se obtiene:

$$x_1 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{1}{3} \wedge x_2 - x_3 - x_4 + \frac{5}{3}x_5 = \frac{1}{3}$$

de donde: $x_2 = a + b - \frac{5}{3}c + \frac{1}{3}$ y $x_1 = \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}$

Luego:

$$[x_1; x_2; x_3; x_4; x_5] = [\frac{1}{3}c + \frac{1}{3}; a + b - \frac{5}{3}c + \frac{1}{3}; a; b; c]$$

PROBLEMA 77

Resolver:
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + v = b \\ x + z + v = c \\ y + z + v = d \end{cases}$$

Resolución:

Con la matriz ampliada, sumando todas las filas en la primera se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 & a+b+c+d \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & n \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \end{array} \right]$$

Donde: $n = \frac{a+b+c+d}{3}$. Restando la primera fila de las demás; para luego sumar las obtenidas a la primera, resulta:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & n \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b-n \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c-n \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d-n \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & b+c+d-2n \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b-n \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c-n \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d-n \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & n-d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & n-c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & n-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b+c+d-2n \end{array} \right]$$

De donde: $x = n - d$
 $y = n - c$
 $z = n - b$
 $v = b + c + d - 2n$

Reemplazando n :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+b+c-2d}{3} \\ y &= \frac{a+b-2c+d}{3} \\ z &= \frac{a-2b+c+d}{3} \\ v &= \frac{-2a+b+c+d}{3} \end{aligned}$$

PROBLEMA 78

Indicar un valor Irracional de "a" para el cual el sistema Homogéneo:

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

Tiene soluciones no triviales.

Resolución:

Usando sólo la matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} &\xrightarrow{f_1 \times f_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{a} \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a} f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{a} \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1-a^2-(a-1)^2}{a} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si el sistema homogéneo de tres variables ($n = 3$) tiene soluciones distintas de la trivial, entonces la característica de la matriz de coeficientes debe ser $r < 3$ y para esto:

$$1 - a^2 - \frac{(a-1)^2}{a} = 0 \rightarrow (a-1)(a^2+2a-1) = 0$$

Luego: $a = 1 \vee a^2 + 2a - 1 = 0$

como $a \in \mathbb{Q}'$ (irracional), entonces de: $a^2 + 2a - 1 = 0$

$$a = -1 \pm \sqrt{2}$$

PROBLEMA 79

En el sistema: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 3 \end{cases}$

Calcular el valor de "a", si: $y + z = 1$

Resolución

Usando la matriz ampliada con la última ecuación inclusive:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{f_1 + (f_2 + f_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} a+2 & a+2 & a+2 & 6 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{a+2} f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{6}{a+2} \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{6}{a+2} \\ 0 & a-1 & 0 & 2 - \frac{6}{a+2} \\ 0 & 0 & a-1 & 3 - \frac{6}{a+2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 \times f_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{6}{a+2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 2 - \frac{6}{a+2} \\ 0 & 0 & a-1 & 3 - \frac{6}{a+2} \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{6}{a+2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 2 - \frac{6}{a+2} \\ 0 & 0 & a-1 & 3 - \frac{6}{a+2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$f_3 - (a-1)f_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{6}{a+2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 3-a-\frac{6}{a+2} \\ 0 & 0 & a-1 & 3-\frac{6}{a+2} \end{bmatrix} \quad f_4 + f_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{6}{a+2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 3-a-\frac{6}{a+2} \\ 0 & 0 & 0 & 6-a-\frac{12}{a+2} \end{bmatrix}$$

Como el sistema es compatible ($a \neq 1$) y la matriz de los coeficientes del sistema tiene característica $r = 3$, entonces la matriz ampliada también debe tener característica

$$r = 3 \text{ y para esto: } 6 - a - \frac{12}{a+2} = 0 \rightarrow 4a - a^2 = 0$$

$$a = 4 \vee a = 0$$

PROBLEMA 80

Resolver:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2a_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2a_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2a_4 \end{cases}$$

Resolución:

Empleando la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2a_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2a_2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2a_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2a_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1, f_3-f_1, f_4-f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2a_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2a_2-2a_1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2a_3-2a_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2a_4-2a_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1-a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_1-a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_1-a_4 \end{bmatrix}$$

$$f_1 - f_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a_1 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_1 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 - a_4 \end{bmatrix} \quad f_1 - f_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_1 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 - a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 - a_4 \end{bmatrix}$$

$$f_4 - f_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_1 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 - a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & a_3 - a_4 - a_1 + a_2 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{2}f_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_1 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 - a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}{2} \end{bmatrix}$$

$$f_1 + f_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a_1 + a_2 - a_3 - a_4}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente: $x_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}$

$$x_2 = \frac{a_1 + a_2 - a_3 - a_4}{2}$$

$$x_3 = \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4}{2}$$

$$x_4 = \frac{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}{2}$$

PROBLEMA 81

Resolver:
$$\begin{cases} (c+a)y + (a+b)z - (b+c)x = 2a^3 \\ (a+b)z + (b+c)x - (c+a)y = 2b^3 \\ (b+c)x + (c+a)y - (a+b)z = 2c^3 \end{cases}$$

Siendo: $a+b \neq 0$; $b+c \neq 0$ y $c+a \neq 0$

Resolución:

Mediante la matriz ampliada, se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -b-c & c+a & a+b & 2a^3 \\ b+c & -c-a & a+b & 2b^3 \\ b+c & c+a & -a-b & 2c^3 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2+f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -b-c & c+a & a+b & 2a^3 \\ 0 & 0 & 2(a+b) & 2(a^3+b^3) \\ 0 & 2(c+a) & 0 & 2(c^3+a^3) \end{array} \right] \sim$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}f_2 \times \frac{1}{2}f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -b-c & c+a & a+b & 2a^3 \\ 0 & c+a & 0 & c^3+a^3 \\ 0 & 0 & a+b & a^3+b^3 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1-(f_2+f_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} -b-c & 0 & 0 & -b^3-c^3 \\ 0 & c+a & 0 & c^3+a^3 \\ 0 & 0 & a+b & a^3+b^3 \end{array} \right]$$

Luego: $(-b-c)x = -b^3 - c^3$

$$(c+a)y = c^3 + a^3$$

$$(a+b)z = a^3 + b^3$$

$$\boxed{x = b^2 - bc + c^2 \quad ; \quad y = c^2 - ca + a^2 \quad ; \quad z = a^2 - ab + b^2}$$

NIVEL AVANZADO

PROBLEMA 82

Si A es una matriz cuadrada tal que: $A^n = 0 \wedge A^{n-1} \neq 0$ con n entero positivo, hallar la inversa de $(A - I)$.

Resolución:

De las condiciones: $A^n = 0 \wedge A^{n-1} \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y con las propiedades:

$$AI = IA = A \wedge AA^{-1} = I \quad \text{se tiene:}$$

$$I = I \rightarrow I = I - A + A - A^2 + A^2 - \dots - A^{n-1} + A^{n-1} - A^n + A^n$$

$$I = (I - A) + (A - A^2) + (A^2 - A^3) + \dots + (A^{n-1} - A^n) + A^n$$

$$I = -(A - I) - A(A - I) - A^2(A - I) - \dots - A^{n-1}(A - I) \quad ; \quad A^n = 0$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(A - I)^{-1}$:

$$I(A - I)^{-1} = -(A - I)(A - I)^{-1} - A(A - I)(A - I)^{-1} - A^2(A - I)(A - I)^{-1} - \dots - A^{n-1}(A - I)(A - I)^{-1}$$

$$\rightarrow I(A - I)^{-1} = -I - A - A^2 - \dots - A^{n-1} \cdot I$$

Luego:

$$\boxed{(A - I)^{-1} = -I - A - A^2 - \dots - A^{n-1}}$$

PROBLEMA 83

Siendo A una matriz cuadrada de orden n y además regular ($|A| \neq 0$), demostrar que:

$$ADJ(ADJ(A)) = |A|^{n-2} \cdot A$$

Resolución:

Se sabe que: $A \cdot ADJ(A) = \text{Diag}(|A|; |A|; |A|; \dots; |A|) = |A| \cdot I$

Entonces:

$$ADJ(A) \cdot ADJ(ADJ(A)) = \text{Diag}(|ADJ(A)|; |ADJ(A)|; |ADJ(A)|; \dots; |ADJ(A)|) = |ADJ(A)| \cdot I$$

pero, también se sabe que: $|ADJ(A)| = |A|^{n-1}$, luego:

$$ADJ(A) \cdot ADJ(ADJ(A)) = |A|^{n-1} \cdot I$$

Multiplicando por A ambos miembros:

$$A \cdot ADJ(A) \cdot ADJ(ADJ(A)) = A \cdot |A|^{n-1} \cdot I = |A|^{n-1} \cdot A$$

$$|A| \cdot ADJ(ADJ(A)) = |A|^{n-1} \cdot A$$

Luego:

$$ADJ(ADJ(A)) = |A|^{n-2} \cdot A$$

PROBLEMA 84

Demostrar que:

Si A es una matriz simétrica $\rightarrow ADJ(A)$ es simétrica

Si A es una matriz hermítica $\rightarrow ADJ(A)$ es hermítica

Resolución:

* Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada simétrica de orden n , es decir: $A^t = A$. Si M_{ij} es la matriz de orden $n-1$ que se obtiene al eliminar la i -ésima fila y la j -ésima columna de A , entonces: $M_{ij} = (M_{ji})^t$ (la comprobación queda para el lector)

$$\text{Luego: } |M_{ij}| = |(M_{ji})^t| \rightarrow |M_{ij}| = |M_{ji}|$$

Nótese que M_{ij} , en general, es distinto de M_{ji} , aún siendo A simétrica.

Por otro lado: $ADJ(A) = [\alpha_{ij}]$ donde α_{ij} es el adjunto de a_{ij} y

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| = (-1)^{j+i} |M_{ji}| = \alpha_{ji}$$

como: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \rightarrow ADJ(A)$ es simétrica

l.q.q.d

* Sea: $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada hermítica de orden n , es decir:

$$\overline{A}^{-t} = A \quad \vee \quad A^t = \overline{A}$$

Además, por propiedad, se sabe que: $|\overline{A}| = \overline{|A|}$

Si M_{ij} es la matriz de orden $n-1$, obtenida de A luego de eliminar la i -ésima fila y la j -ésima columna, entonces:

$$M_{ij} = (\overline{M_{ji}})^t \quad \vee \quad (M_{ij})^t = \overline{M_{ji}} \quad (\text{la comprobación queda para el lector})$$

Luego: $ADJ(A) = [\alpha_{ij}]$ donde α_{ij} es el adjunto de a_{ij} y:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| = (-1)^{i+j} |(M_{ij})^t| = (-1)^{j+i} |\overline{M_{ji}}| \quad (\text{ver 3.7})$$

$$a_{ij} = \overline{(-1)^{j+i} |M_{ji}|} = \overline{\alpha_{ji}}$$

Como: $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}} \rightarrow ADJ(A)$ es hermítica

l.q.q.d

PROBLEMA 85

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$;

$$C = \begin{bmatrix} (n+1)a^{n+4} & a^{n+5} \\ a^{n+5} & 0 \end{bmatrix}$$

Encontrar la matriz "X" de orden 2, que satisface la condición: $A^n \cdot X \cdot B = C$

Resolución:

$$\text{Siendo: } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} ;$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

Generalizando, para $n \in \mathbb{Z}^+$

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Luego, en la condición: $A^n \cdot X \cdot B = C \rightarrow A^n \cdot X \cdot BB^{-1} = CB^{-1}$

$$A^n \cdot X = C \cdot B^{-1}$$

(α)

$$\text{pero: } B^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a & 0 \\ -1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -a^{-2} & -a^{-1} \end{bmatrix}$$

Asumiendo que: $X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, al reemplazar en (α), se tiene:

$$\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n+1)a^{n+4} & a^{n+5} \\ a^{n+5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -a^{-2} & -a^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a^n p + na^{n-1}r & a^n q + na^{n-1}s \\ a^n \cdot r & a^n \cdot s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na^{n+3} & -a^{n+4} \\ a^{n+4} & 0 \end{bmatrix}$$

De donde: $a^n \cdot s = 0 \rightarrow s = 0$

$$a^n \cdot r = a^{n+4} \rightarrow r = a^4$$

$$a^n q + na^{n-1} \cdot s = -a^{n+4} \rightarrow q = -a^4$$

$$a^n p + na^{n-1} \cdot r = na^{n+3} \rightarrow p = 0$$

por lo tanto:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -a^4 \\ a^4 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 86

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz triangular superior de orden 4, tal que: $a_{ij} = 1$, si $i \leq j$

y $B = [b_{ij}] = A^n$; $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$

Hallar: b_{14}

Resolución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, para $n \in \mathbb{Z}^+$

$$A^n = B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

b_{12} es el término enésimo en la sucesión: 1 2 3 4 ... $\rightarrow b_{12} = n$

b_{13} es el término enésimo en la sucesión: 1 3 6 10 ... $\rightarrow b_{13} = \frac{n(n+1)}{2}$

y b_{14} es el término enésimo en la sucesión: 1 4 10 20 ...

$$b_{14} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

PROBLEMA 87

Dada la matriz: $C = \begin{bmatrix} \sen \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sen \alpha \end{bmatrix}$

se define el polinomio: $P_{(X)} = \sum_{k=1}^n X^k$

Calcular el determinante de: $P_{(C)}$

Resolución:

$$C = \begin{bmatrix} \sen \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sen \alpha \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} \sen \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sen \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sen \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sen \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Luego: C es involutiva, y en consecuencia:

$$C^n = I, \quad \forall n \text{ par y } C^n = C; \quad \forall n \text{ impar.}$$

Entonces:
$$P_{(C)} = \sum_{k=1}^n C^k = C + C^2 + C^3 + \dots + C^n$$

* Si n es par:
$$P_{(C)} = C + I + C + I + \dots + I = \frac{n}{2}(C + I)$$

$$P_{(C)} = \frac{n}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 - \sin \alpha \end{bmatrix}$$

De donde:
$$|P_{(C)}| = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 + \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 - \sin \alpha \end{vmatrix} = \frac{n^2}{4}(0) = 0$$

* Si n es impar:
$$P_{(C)} = C + I + C + I + \dots + C$$

$$\rightarrow P_{(C)} = \left(\frac{n+1}{2}\right)C + \left(\frac{n-1}{2}\right)I = \begin{bmatrix} \left(\frac{n+1}{2}\right)\sin \alpha + \frac{n-1}{2} & \left(\frac{n+1}{2}\right)\cos \alpha \\ \left(\frac{n+1}{2}\right)\cos \alpha & -\left(\frac{n+1}{2}\right)\sin \alpha + \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$$

De donde:
$$|P_{(C)}| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sin^2 \alpha - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha$$

$$|P_{(C)}| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = -n$$

$$\boxed{\begin{matrix} P_{(C)} = 0; \text{ si } n \text{ es par} \\ P_{(C)} = -n; \text{ si } n \text{ es impar} \end{matrix}}$$

PROBLEMA 88

Calcular:
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Acomodando los elementos de la primera columna y luego descomponiendo como la adición de dos determinantes; se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1+0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1+0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1+0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

En el primer determinante, restando la primera fila de las demás y en el segundo, desarrollando con respecto a la primera columna, resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

En el segundo determinante, empleando el mismo procedimiento anterior:

$$|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 5! + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 5! + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$|A| = 5! + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 29$$

$$\boxed{|A| = 394}$$

PROBLEMA 89

Calcular el determinante de orden n :

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$$

Resolución :

Llamando Δ_n a éste determinante. Restando la segunda columna de la primera, se obtiene:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \dots & a & a \\ -a-x & x & a & \dots & a & a \\ 0 & -a & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$$

Desarrollando, por propiedad, con respecto a la primera columna, resulta:

$$\Delta_n = (x-a) \cdot \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & x \end{vmatrix} + (x+a) \cdot \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & x \end{vmatrix}$$

El primer determinante es el mismo que el inicial, pero de orden $(n-1)$; en éste si realizamos los mismos pasos iniciales se obtendrá un resultado similar. El segundo determinante es fácil de calcular; agregando la primera fila a las demás, se obtiene: $a(x+a)^{n-2}$

Luego:

$$\Delta_n = (x-a) \Delta_{n-1} + a(x+a)^{n-1}$$

$$\Delta_n = (x-a) [(x-a) \Delta_{n-2} + a(x+a)^{n-2}] + a(x+a)^{n-1}$$

$$\Delta_n = (x-a)^2 \Delta_{n-2} + a[(x-a)(x+a)^{n-2} + (x+a)^{n-1}]$$

$$\Delta_n = (x-a)^2 [(x-a) \Delta_{n-3} + a(x+a)^{n-3}] + a[(x-a)(x+a)^{n-2} + (x+a)^{n-1}]$$

$$\Delta_n = (x-a)^3 \Delta_{n-3} + a[(x-a)^2(x+a)^{n-3} + (x-a)(x+a)^{n-2} + (x+a)^{n-1}]$$

$$\text{Luego: } \Delta_n = (x-a)^k \Delta_{n-k} + a \sum_{i=1}^k (x+a)^{n-i} (x-a)^{i-1}$$

Haciendo $k = n-1$ y teniendo en cuenta que: $\Delta_1 = x$, se tiene:

$$\Delta_n = (x-a)^{n-1} \cdot \Delta_1 + a \sum_{i=1}^{n-1} (x+a)^{n-i} \cdot (x-a)^{i-1}$$

$$\Delta_n = (x-a)^{n-1} \cdot x + a[(x+a)^{n-1} + (x+a)^{n-2}(x-a) + (x+a)^{n-3} \cdot (x-a)^2 + \dots + (x+a)(x-a)^{n-2}]$$

$$\Delta_n = (x-a)^{n-1} \cdot x + a(x+a) \cdot \left[\frac{(x+a)^{n-1} - (x-a)^{n-1}}{(x+a) - (x-a)} \right]$$

$$\Delta_n = (x-a)^{n-1} \cdot x + (x+a) \cdot \left[\frac{(x+a)^{n-1} - (x-a)^{n-1}}{2} \right]$$

Finalmente:

$$\Delta_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}$$

PROBLEMA 90

Dada la matriz cuadrada de orden 6 definida por: $A = [a_{ij}]$ donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & ; \text{ si } i > j \\ 0 & ; \text{ si } i = j \\ 1 & ; \text{ si } i < j \end{cases}$$

Calcular: $|A|$

Resolución :

Con las condiciones dadas, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Este es un caso particular del problema anterior con: $x = 0$; $a = 1$ y $n = 6$

Luego: $|A| = \frac{(0+1)^6 + (0-1)^6}{2}$

$|A| = 1$

PROBLEMA 91

Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolución :

Sumando todas las columnas a la primera; luego desarrollando por propiedad, con respecto a la primera columna, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Sumando todas las filas a la primera y luego agregar ésta primera a las demás filas, resulta:

$$|A| = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por una propiedad, demostrada en el problema 97 y teniendo en cuenta que el determinante ahora es de orden $(n-1)$:

$$|A| = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \cdot \underbrace{(-1)(-n)(-n)(-n) \dots (-n)}_{(n-2) \text{ factores}}$$

$$|A| = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2} + (n-2)} \cdot n^{n-3}$$

Luego:

$$|A| = (-1)^{\frac{(n-2)(n+1)}{2}} \cdot \frac{(n+1) \cdot n^{n-2}}{2}$$

PROBLEMA 92

Calcular:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & x-2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(n-2) & x-6 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-2(n-1) & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x-2n \end{vmatrix}$$

Resolución :

Observe que el determinante es de orden $n+1$, considerándolo como una función de x , denotémoslo por: $\Delta_{n+1}(x)$; realizando las siguientes transformaciones: a cada fila sumarle todas las que le siguen, comenzando por la primera.

$$\Delta_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} x-n & x-n & x-n & x-n & \dots & x-n \\ -n & x-n-1 & x-n & x-n & \dots & x-n \\ 0 & -(n-1) & x-n-2 & x-n & \dots & x-n \\ 0 & 0 & -(n-2) & x-n-3 & \dots & x-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-2n \end{vmatrix}$$

De cada columna restarle la anterior, empezando por la última; se obtiene:

$$\Delta_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} x-n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -n & x-1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(n-2) & x-5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-2n+1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante con respecto a la primera fila, para luego darle forma al menor obtenido, se obtiene:

$$\Delta_{n+1}(x) = (x-n) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(n-1) & x-3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-2) & x-5 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(n-3) & x-7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-2n+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n+1}(x) = (x-n) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(n-1) & x-1-2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-2) & x-1-4 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(n-3) & x-1-6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-1-2(n-1) \end{vmatrix}$$

El determinante obtenido tiene la misma forma que el inicial pero de orden n y en función de $x-1$, luego:

$$\Delta_{n+1}(x) = (x-n) \cdot \Delta_n(x-1)$$

Si efectuamos el mismo procedimiento anterior, obtendremos:

$$\Delta_n(x-1) = (x-n) \cdot \Delta_{n-1}(x-2)$$

$$\Delta_{n-1}(x-2) = (x-n) \cdot \Delta_{n-2}(x-3)$$

Así, hasta: $\Delta_2(x-n-1) = (x-n) \Delta_1(x-n)$

Donde: $\Delta_1(x-n) = x-n$

Finalmente, reemplazando en forma sucesiva, resulta:

$$\Delta_{n+1}(x) = \underbrace{(x-n)(x-n)(x-n) \dots (x-n)}_{(n+1) \text{ veces}}$$

$$\Delta_{n+1}(x) = (x-n)^{n+1}$$

PROBLEMA 93

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$

Resolución:

Realizando las operaciones: $f_1 \times f_2$ y $f_4 \times f_5$; para luego: $f_2 - x f_1$ y $f_3 - f_1$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -x^2 & x-1 & 1-x & 0 \\ 0 & -x & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix}$$

Trasladando f_4 dos lugares hacia arriba, luego: $f_3 + x^2 f_2$, $f_4 + x f_2$ y $f_5 - f_2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -x^2 & x-1 & 1-x & 0 \\ 0 & -x & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & x-1-x^2 & 1-x & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1-x \end{vmatrix}$$

Finalmente $f_5 + x f_4$; para obtener una matriz triangular superior:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & x-1-x^2 & 1-x & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x+x^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (x-1-x^2) \cdot (-1) \cdot (1-x+x^3)$$

Luego:

$$|A| = (x^2 - x + 1)(x^3 - x + 1)$$

PROBLEMA 94

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

Resolución:

El determinante es de orden n . Restando a cada fila la anterior, comenzando por la última; luego de esto sumando a cada columna la primera, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & n+1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Por propiedad, desarrollando con respecto a la n -ésima columna:

$$|A| = (n+1) \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$|A| = (-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{(n-1) \text{ factores}}$$

$$|A| = (-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}$$

PROBLEMA 95

Siendo: $S_n = \sum_{k=1}^n k$, calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$$

Resolución:

Restando de cada columna la anterior, comenzando por la última, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_1 & S_2 - S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_1 & S_2 - S_1 & S_3 - S_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_1 & S_2 - S_1 & S_3 - S_2 & \dots & S_{n-1} - S_{n-2} & 0 \\ S_1 & S_2 - S_1 & S_3 - S_2 & \dots & S_{n-1} - S_{n-2} & S_n - S_{n-1} \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = S_1(S_2 - S_1)(S_3 - S_2)(S_4 - S_3) \dots (S_n - S_{n-1})$$

Pero: $S_{p+1} - S_p = \sum_{k=1}^{p+1} k - \sum_{k=1}^p k = p+1 + \sum_{k=1}^p k - \sum_{k=1}^p k$

$$S_{p+1} - S_p = p+1; \forall p \in \mathbb{Z}^+ \text{ y además: } S_1 = 1$$

$$|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$$

$$|A| = n!$$

PROBLEMA 96

Calcular el valor de: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9 & 1 & 2 & \dots & 8 \end{vmatrix}$

Resolución:

En el determinante de orden 9, teniendo en cuenta que: $1+2+3+4+\dots+9 = 45$, sumando todas las columnas a la primera y luego sacando factor común, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 45 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ 45 & 3 & 4 & 5 & \dots & 1 \\ 45 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 45 & 9 & 1 & 2 & \dots & 7 \\ 45 & 1 & 2 & 3 & \dots & 8 \end{vmatrix} = 45 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 9 & 1 & 2 & \dots & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & 8 \end{vmatrix}$$

Restando a cada fila la anterior, comenzando por la última, y luego desarrollando con respecto a la primera columna, resulta:

$$|A| = 45 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -8 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -8 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 45 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & -8 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -8 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Cambiando el orden de las columnas, por propiedad, que demuestra en el problema siguiente, se obtiene un determinante cuya forma es la misma que la del problema 59, para: $x = -8$; $a = 1$ y $n = 8$,

luego:

$$|A| = 45 \cdot (-1)^{\frac{7 \cdot 8}{2}} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -8 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -8 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -8 \end{vmatrix} = 45 \cdot (-8 + 7 \cdot 1) (-8 - 1)^{8-1}$$

$$|A| = 45 (-1) (-9)^7$$

$$|A| = 5 \cdot 9^8$$

PROBLEMA 97.

Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1(n-1)} & a_{1(n-2)} & \dots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & a_{2(n-2)} & \dots & a_{21} \\ a_{3n} & a_{3(n-1)} & a_{3(n-2)} & \dots & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n(n-1)} & a_{n(n-2)} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

donde el orden de las columnas en el segundo determinante es contrario al orden en el primero.

y calcular:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Resolución :

Recordando que si una línea cualquiera se traslada "p" lugares, el determinante queda multiplicado por $(-1)^p$.

Trasladando la última columna $(n-1)$ lugares, queda así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} \\ a_{2n} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ a_{3n} & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} =$$

Ahora, la última columna se traslada $(n-2)$ lugares; luego la que quedará como última se traslada $(n-3)$ lugares y así sucesivamente, quedando así:

$$= (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-2} \cdot \dots \cdot (-1)^{n-(n-1)} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1(n-1)} & a_{11} & \dots & a_{1(n-2)} \\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & a_{21} & \dots & a_{2(n-2)} \\ a_{3n} & a_{3(n-1)} & a_{31} & \dots & a_{3(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n(n-1)} & a_{n1} & \dots & a_{n(n-2)} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1(n-1)} & a_{1(n-2)} & \dots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & a_{2(n-2)} & \dots & a_{21} \\ a_{3n} & a_{3(n-1)} & a_{3(n-2)} & \dots & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n(n-1)} & a_{n(n-2)} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1(n-1)} & a_{1(n-2)} & \dots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & a_{2(n-2)} & \dots & a_{21} \\ a_{3n} & a_{3(n-1)} & a_{3(n-2)} & \dots & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n(n-1)} & a_{n(n-2)} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

Luego:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(5-1) \cdot 5}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{10} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

120

PROBLEMA 98

Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolución :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \times f_4 \\ f_3 + f_5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & -5 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{\substack{f_2 + 2f_1 \\ f_4 - f_1 \\ f_5 + 2f_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \times f_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1 - f_2 \\ f_3 + f_2 \\ \sim \\ f_4 - f_2 \\ f_5 - 3f_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad f_3 \times f_4 \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1 + f_3 \\ f_4 - 3f_3 \\ \sim \\ f_5 + 2f_1 \\ f_2 - 2f_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

Como la matriz canónica C tiene rango $r = 3$, entonces la matriz inicial también tiene rango

$$r = 3$$

PROBLEMA 99

Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n donde: $a_{ij} = \begin{cases} n-7 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

¿Para qué valores de n , la característica r de la matriz A es igual a n ?

Resolución:

Para la matriz cuadrada A de orden n y característica r : $r = n \iff |A| \neq 0$

Desarrollando la matriz, con las condiciones dadas y calculando su determinante; para lo cual, sumando todas las filas a la primera y luego sacando factor común, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} n-7 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & n-7 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & n-7 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 2 & n-7 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & n-7 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n-7 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & n-7 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & n-7 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n-7 \end{vmatrix}$$

Donde $x = n - 7 + 2(n - 1) = 3(n - 3)$. Ahora restando el doble de la primera fila a todas las demás, se tiene:

$$|A| = 3(n-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-9 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-9 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-9 \end{vmatrix} = 3(n-3)(n-9)^{n-1} \neq 0$$

Luego: $n \neq 3 \wedge n \neq 9$

$$n \in \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; \dots\}$$

PROBLEMA 100

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n = 2a \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - \dots - x_n = 4a \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 - \dots - x_n = 8a \\ \vdots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \dots + (2^n - 1)x_n = 2^n a \end{cases}$$

Resolución:

Usando la matriz ampliada y restándole a cada fila la anterior, comenzando por la última, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 2a \\ -1 & 3 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 4a \\ -1 & -1 & 7 & -1 & \dots & -1 & -1 & 8a \\ -1 & -1 & -1 & 15 & \dots & -1 & -1 & 16a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 2^{n-1} & -1 & 2^{n-1}a \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 2^n & 2^n a \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 2a \\ -2 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2a \\ 0 & -4 & 8 & 0 & \dots & 0 & 0 & 4a \\ 0 & 0 & -8 & 16 & \dots & 0 & 0 & 8a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-2}a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2^{n-1} & 2^n & 2^{n-1}a \end{array} \right]$$

A partir de la segunda, dividiendo cada fila entre 2; 4; 8; ...; 2^{n-1} ; y luego sumándole a cada fila la anterior, comenzando por la segunda, resulta:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 2a \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 2a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 4a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & -1 & -1 & 5a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & na \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & (n+1)a \end{array} \right]$$

Luego, comenzando por la última fila:

$$x_n = (n+1)a$$

$$x_{n-1} - x_n = na \rightarrow x_{n-1} = (2n+1)a$$

$$x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = (n-1)a \rightarrow x_{n-2} = (4n+1)a$$

$$x_{n-3} - x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = (n-2)a \rightarrow x_{n-3} = (8n+1)a$$

Análogamente:

$$x_3 = (2^{n-3} \cdot n + 1)a$$

$$x_2 = (2^{n-2} \cdot n + 1)a$$

$$x_1 = (2^{n-1} \cdot n + 1)a$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BASICO

PROBLEMA 1

Si:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; B^2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcular: $(A - B)^2$

$$A) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 2

$$\text{Calcular: } \Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$A) 8abc$$

$$B) 4abc$$

$$C) 2abc$$

$$D) abc$$

$$E) a^2 b^2 c^2$$

PROBLEMA 3

$$\text{Calcular: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$A) 24$$

$$B) -1$$

$$C) 0$$

$$D) 1$$

$$E) 12$$

PROBLEMA 4

$$\text{Si: } w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \wedge i = \sqrt{-1}$$

$$\text{Calcular: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w & w^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A) w$$

$$B) w^2$$

$$C) 1$$

$$D) 0$$

$$E) -1$$

PROBLEMA 5

$$\text{Calcular: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A) 2$$

$$B) -2$$

$$C) 2i$$

$$D) -2i$$

$$E) 0$$

PROBLEMA 6

Si A es una matriz nilpotente de índice 2, calcular:

$$A(I+A)^5$$

$$A) A$$

$$B) I+A$$

$$C) A^2$$

$$D) I+A^2$$

$$E) I-A$$

PROBLEMA 7

Dada la matriz: $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{si } i < j \\ i+j & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

$$\text{Calcular: } |A \cdot A^t|$$

$$A) 148$$

$$B) 134$$

$$C) 118$$

$$D) 234$$

$$E) 218$$

PROBLEMA 8

Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8$, calcular:

$R = 6 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

- A) 24 B) -24 C) -100
D) -120 E) -150

PROBLEMA 9

Calcular el determinante:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

- A) 1 B) 6 C) 12 D) 24 E) 60

PROBLEMA 10

Calcular: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

- A) 60 B) 54 C) 48 D) 42 E) 36

PROBLEMA 11

Resolver: $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$

Dar el valor de y .

- A) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ B) $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$
C) $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ D) $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac}$
E) $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

PROBLEMA 12

Calcular:

$\begin{vmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+c} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & -\frac{1}{c} \end{vmatrix}$

- A) a B) b C) c D) 1 E) 0

PROBLEMA 13

Calcular: $\begin{vmatrix} 1 & ab & c(a+b) \\ 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \end{vmatrix}$

- A) 0' B) abc
C) $ab + bc + ac$ D) $2abc$
E) $2(ab + bc + ca)$

PROBLEMA 14

Calcular: $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix}$

Dar como respuesta:

$\frac{\Delta}{(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)}$

- A) $(a-c)(b-d)$ B) $(c-a)(d-b)$
C) $(b-d)(c-d)$ D) $(a-d)(b-d)$
E) $(a-c)(d-b)$

PROBLEMA 15

Calcular el valor de:

$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ -\frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

- A) 1 B) $1+t$ C) $1-t$
D) $1+t^2$ E) $1-t^2$

PROBLEMA 16

Sea la matriz: $A = [a_{ij}]$ de orden 4, tal que:

$a_{ij} = \begin{cases} ij+1 & ; \text{ si } i \geq j \\ ij-2 & ; \text{ si } i < j \end{cases}$

Calcular: $|A|$

- A) 180 B) 189 C) 198 D) 207 E) 216

PROBLEMA 17

Luego de resolver el sistema lineal:

$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 3y - z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$

Dar xyz

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

PROBLEMA 18

Dado el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = m^2 \\ x + y + mz = m^3 \end{cases}$

¿Cuántos posibles valores de "m", hacen que el sistema dado no tenga solución única?

- A) Ninguno B) 1 C) 2
D) 3 E) Infinitos

PROBLEMA 19

Sea $X = [x_{ij}]$ la matriz que verifica la ecuación:

$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Calcular: $\sum x_{ij} ; \forall i, j$

- A) 0 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA 20

Calcular: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & a & a \\ 1 & a & 0 & a & a \\ 1 & a & a & 0 & a \\ 1 & a & a & a & 0 \end{vmatrix}$

- A) a^5 B) $4a^3$ C) $5a^4$
D) $4a^5$ E) $4a^4$

PROBLEMA 21

Calcular:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$

- A) 1 B) xyz C) $xyz - 1$
D) $xyz + 1$ E) -1

PROBLEMA 22

Hallar: $|A^{-1}|^2$, si:

$ADJ(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

- A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{81}$
D) $\frac{1}{243}$ E) $\frac{1}{4}$

PROBLEMA 23

En la matriz $X = [x_{ij}]$ de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La suma de todos los x_{ij} es:

- A) 0 B) 13 C) 1 D) 3 E) 10

PROBLEMA 24

Sea la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 4, tal que:

$$a_{ij} = a_{ji} = 1, \quad \forall i, j = \overline{1; 4}$$

$$a_{ij} = a_{i(j-1)} + a_{(i-1)j}$$

Hallar: $|2A|$

- A) 64 B) 320 C) 160 D) 16 E) 32

PROBLEMA 25

Si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & x & 3 \end{bmatrix}$$

es simétrica, calcular: traza (A^{-1})

- A) -12 B) -14 C) -16
D) -13 E) -15

PROBLEMA 26

Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

- A) 8 B) 64 C) 128
D) 512 E) 1024

PROBLEMA 27

Calcular los valores de a , para los cuales el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} a^2x + 3y + 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

tiene soluciones no triviales

- A) 2; -4 B) -2; -4 C) 2; 4
D) 3; 4 E) -3; -4

PROBLEMA 28

Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ x & 4 & y & -5 \\ 5 & -16 & -1 & 16 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & p \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & q \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si el producto AB es la matriz identidad, hallar la suma de los elementos de la diagonal secundaria del producto BA .

- A) 33 B) $\frac{383}{11}$ C) 35
D) $\frac{400}{11}$ E) $\frac{407}{11}$

PROBLEMA 29

Siendo: $A = [a_{ij}]$ una matriz simétrica de orden 4, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & ; \text{ si } 2 \leq i+j \leq 5 \\ ij-4 & ; \text{ si } 6 \leq i+j \leq 8 \end{cases}$$

Calcular $|A|$

- A) 20 B) 24 C) 28 D) 32 E) 64

PROBLEMA 30

Dada la matriz: $ADJ(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & x & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

Donde: $|A| = 2$, hallar " x "

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

PROBLEMA 31

Calcular:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

- A) $a+b+c$ B) $a^2+b^2+c^2$

- C) $ab+bc+ac$ D) $(a+b+c)^2$

- E) $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)$

PROBLEMA 32

Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

- A) 160 B) 80 C) -160
D) -80 E) 24

PROBLEMA 33

Si: $A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{bmatrix}$

Reducir: $\frac{|A|}{(b-a)(c-a)(c-b)}$

- A) $a+b+c$

- B) $ab+bc+ac$

- C) abc

- D) $a(b+c)$

- E) $ab+c(a-b)$

PROBLEMA 34

Sea " A " una matriz de orden 2 cuyo determinante es igual a 4, la diferencia entre la suma de los elementos de la diagonal principal y la suma de los elementos de la diagonal secundaria es 8. Si se suma " x " a cada elemento de la matriz " A " entonces el valor de su determinante es igual a (-4) . Calcular el valor de " x ".

- A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

PROBLEMA 35

Calcular el valor del determinante de

$$R = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

Dar: $\frac{|R|}{(a+b)^2}$

- A) $a^4+2b(a-b)^2$ B) $a^4+2b^2(a-b)^2$

- C) $a^4+2b(a+b)^2$ D) $a^4+2b^2(a+b)^2$

- E) $a^4+2(a+b)^4$

PROBLEMA 36

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2+x & x & x \\ x & 3+x & x \\ x & x & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

- A) $-\frac{12}{13}$ B) $-\frac{11}{13}$ C) $-\frac{9}{13}$
D) $\frac{8}{13}$ E) $\frac{11}{13}$

PROBLEMA 37

Calcular el valor de x que verifica la ecuación:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = 10a^3$$

- A) 7a B) 6a C) 5a D) 4a E) 3a

PROBLEMA 38

Dada la matriz $M = [m_{ij}]$; tal que:

$$M = \begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}^{30} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}^{30};$$

$$a \neq 0$$

Hallar: $\sum m_{ij}$; $\forall i, j$

- A) 0 B) $2a^{30}$ C) $4a^{30}$
D) a^{30} E) $-a^{30}$

PROBLEMA 39

Siendo A una matriz cuadrada regular tal que:

$$A = |A| \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Hallar: traza (A^{-1})

- A) 6 B) $-\frac{9}{2}$ C) -9
D) $\frac{9}{2}$ E) 9

PROBLEMA 40

Hallar el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2534 & 3 & 35 & 532 \\ 1423 & 2 & 24 & 421 \\ 4312 & 1 & 13 & 314 \\ 3251 & 5 & 52 & 253 \end{vmatrix}$$

- A) 20 B) 24 C) 28
D) -24 E) -20

NIVEL INTERMEDIO

PROBLEMA 41

Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = [b_{ij}]$$

Tales que: $A \cdot B = I$

Hallar: $\sum (b_{ij} + b_{ji})$; $\forall i, j$

- A) -3 B) -5 C) -7
D) 3 E) 5

PROBLEMA 42

Hallar la suma de todos los elementos de la matriz

X que verifica la ecuación matricial:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [4 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0]$$

- A) -2 B) 2 C) 3 D) -3 E) 6

PROBLEMA 43

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar: A^{2n+1} ($n \in \mathbb{Z}^+$)

- A) A B) $-A$ C) I
D) $-I$ E) $2^{2n+1} \cdot A$

PROBLEMA 44

Sea la matriz: $A = [a_{ij}]$ de orden 4, tal que:

$|A| = 2$, calcular:

$$|(A^t \cdot A)^{-1} \cdot (2A)^t|$$

- A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

PROBLEMA 45

Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

- A) 180 B) 96 C) 64 D) 24 E) 0

PROBLEMA 46

Sabiendo que: $A \cdot B = I$

$$\text{donde: } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Hallar: $|B|$

- A) 0,5 B) 0,01 C) 0,2
D) 0,1 E) 0,05

PROBLEMA 47

Siendo: $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ tal que: $A^3 = -I$

Hallar: $|ADJ(2A^3)|$

- A) 4 B) -8 C) 64 D) -4 E) 8

PROBLEMA 48

Dada la matriz: $A = [a_{ij}]$ de orden n y

$$X = I_n - [A \cdot (A^t \cdot A)^{-1}] \cdot A^t$$

Hallar: X^t

- A) A^t B) $I - A^t$ C) 0
D) A E) $I - A$

PROBLEMA 49

$$\text{Si: } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 2 \ 1]$$

Calcular: $|A|$

- A) 14 B) 7 C) 1 D) 28 E) 0

PROBLEMA 50

$$\text{Sea la matriz: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular: traza (A^{-1})

- A) -3 B) $-\frac{8}{3}$ C) -2
D) $-\frac{7}{3}$ E) $-\frac{4}{3}$

PROBLEMA 51

Dada la matriz: $A = [a_{ij}]$ de orden 3, donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} (i+j)x & ; \text{ si: } i+j < 4 \\ i+xj & ; \text{ si: } i+j \geq 4 \end{cases}$$

Hallar el producto de raíces de la ecuación:

$$|A| = 0$$

- A) -1 B) 1 C) $\frac{9}{4}$
D) $-\frac{9}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

PROBLEMA 52

Hallar el rango de la matriz:

$$\begin{bmatrix} -8 & -128 & -42 & 76 \\ 5 & 3 & 7 & -9 \\ 4 & 20 & 10 & -16 \\ 27 & 69 & 51 & -75 \end{bmatrix}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

PROBLEMA 53

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha-1 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \text{ donde:}$$

$$\alpha > 0 \wedge |A| = -6$$

Si: $AB = I$, donde: $B = [b_{ij}]$, hallar: $\sum b_{ij}$

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{3}$ E) 1

PROBLEMA 54

Hallar la solución $(x; y; z)$ del sistema:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 3 \\ x + 5y + z = 4 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ x + 3y + 5z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{cases}$$

A) $(-2; -1; 1)$ B) $(-2; 1; 1)$

C) $(-2; 0; 1)$ D) $(-2; -1; 0)$

E) $(2; -1; 1)$

PROBLEMA 55

Calcular el valor de:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

A) -120 B) 120 C) 0

D) -24 E) 24

PROBLEMA 56

Sea: $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden 4

Tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+b; & \text{si: } 1 \leq i+j \leq 4 \\ j-b; & \text{si: } 5 \leq i+j \leq 8 \end{cases}$$

Hallar el mayor valor de "b" para que:

$$|A| = 0$$

A) -1 B) 0 C) 1

D) 3 E) 4

PROBLEMA 57

Hallar la característica de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 58

Sea A una matriz cuadrada no nula, tal que:

$$A^2 = 2A - I$$

Calcular: A^n , $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 2$

A) $(n+1)A - nI$ B) $n^2A - I$

C) $n^2A - nI$ D) $nA - (n-1)I$

E) $nA - I$

PROBLEMA 59

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcular: Traza $(3A^{-1} - 2B^{-1})$

A) 4,5 B) 4,2 C) 3,7

D) 3,5 E) 2,7

PROBLEMA 60

Si las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2x+1 & 2 & z-1 \\ x+2 & -1 & 2y \\ y-1 & 8 & x-2z \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3-2y & 2 & x+y \\ z+3 & -1 & z-2x \\ z-5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

son iguales, hallar el valor de xyz

A) 12 B) -12 C) 6

D) -6 E) 24

PROBLEMA 61

Siendo $|\alpha| \neq 1$; resolver:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z - t = 1 \\ x + \alpha y - z + t = \alpha \\ x - y + \alpha z + t = \alpha^2 \\ -x + y + z + \alpha t = \alpha^3 \end{cases}$$

dar el valor de z .

A) $\frac{1}{1-\alpha}$ B) $\frac{1}{\alpha-1}$

C) $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ D) $\frac{\alpha}{\alpha-1}$

E) $\frac{\alpha^2+1}{1-\alpha}$

PROBLEMA 62

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular: Traza $(ADJ(ADJ(A)))$

A) 28 B) 24 C) 21 D) 19 E) 18

PROBLEMA 63

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

Señale la suma de sus raíces.

A) $\frac{n(n+1)}{2}$ B) $\frac{(n-1)n}{2}$

C) $\frac{n^2-1}{2}$ D) $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$

E) $\frac{(n-2)n}{2}$

PROBLEMA 64

Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix}$$

A) $(a+b)b^{n-1}$ B) $(nb+a)a^{n-1}$

C) $(nb+a)b^{n-1}$ D) $(na+b)a^{n-1}$

E) $(na+b)b^{n-1}$

PROBLEMA 65

Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

- A) 1 B) $(-1)^n$ C) n
D) $n!$ E) $(n+1)!$

PROBLEMA 66

Hallar el determinante de la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{bmatrix}$$

- A) $4x(x-1)(x-2)(x-3)$
B) $(x-1)(x-2)(x-3)$
C) $2(x-1)(x-2)(x-3)$
D) $x(x-1)(x-2)(x-3)$
E) $2x(x-1)(x-2)(x-3)$

PROBLEMA 67

Hallar el valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

- A) $(n-1)!$ B) $n!$ C) $(n-2)!$
D) 1 E) 0

PROBLEMA 68

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Señalar la suma de los elementos de la matriz "X", que se obtiene al resolver la ecuación matricial:

$$3(X - 2A) = 5(B - C) + 2(X - A - B)$$

- A) 27 B) 31 C) 33
D) 37 E) 47

PROBLEMA 69

Calcular:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

- A) 90 B) 900 C) -90
D) -900 E) 24

PROBLEMA 70

Calcular el valor de:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 18 E) 24

NIVEL AVANZADO

PROBLEMA 71

Después de resolver el sistema:

$$\begin{cases} a^2x + ay + z = a^3 \\ b^2x + by + z = b^3 \\ c^2x + cy + z = c^3 \end{cases}$$

Indicar el valor de: $x^2 + 2y$

- A) $a + b + c$ B) $ab + bc + ac$
C) $a^2 + b^2 + c^2$ D) abc
E) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

PROBLEMA 72

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z + 6t - 4w = -5 \\ x + y + z + t + w = 7 \\ x + 2z + 4t - w = 11 \\ x - y + z + 3t - 2w = 0 \\ x + 3y + 2z + t - w = 4 \end{cases}$$

Dar el valor de w

- A) $\frac{35}{9}$ B) $\frac{35}{3}$ C) $\frac{35}{6}$
D) $\frac{35}{2}$ E) $\frac{45}{2}$

PROBLEMA 73

Resolver la ecuación en "x"

$$\begin{vmatrix} i & x & x & x \\ -x & i & x & x \\ -x & -x & i & x \\ -x & -x & -x & i \end{vmatrix} = \left(\frac{e^\pi}{2^{2i}} \right)^i$$

Dar como respuesta la menor raíz.

- A) -1 B) $-\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{5}$
D) $-\sqrt{7}$ E) -2

PROBLEMA 74

Calcular:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

- A) $\pi_{k=1}^n (x + n - k)$
B) $\pi_{k=1}^n (x + n + 2k)$
C) $\pi_{k=1}^n (x + n - 2k)$
D) $\pi_{k=1}^n (x + n - 1 - 2k)$
E) $\pi_{k=1}^n (x + n + 1 - 2k)$

PROBLEMA 75

Calcular: $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

- A) $(af + be - cd)^2$ B) $(af - be + cd)^2$
C) $(af - bd + ce)^2$ D) $(ad + bf - ce)^2$
E) $(ad - bf + ce)^2$

PROBLEMA 76

Hallar el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 6+x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4-x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4+x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6-x \end{vmatrix}$$

Para: $x = \sqrt{7}$

- A) 4 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

PROBLEMA 77

Decir cuántas son verdaderas:

* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$; donde A^{-1} es la matriz inversa de A y existe.

* $|ADJ(A)| = |A|^{n-1}$, donde $ADJ(A)$ es la matriz adjunta de A .

* Si: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces:

$$ADJ(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

* Si: $A = kB$, donde k es un escalar ($k \neq 0$), entonces: $|A| = k|B|$

- A) Todas B) 3 C) 2
D) 1 E) Ninguna

PROBLEMA 78

Resolver la ecuación en x

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt[4]{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt[4]{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt[4]{3} \\ \sqrt[4]{3} & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = x + 12$$

- A) 1 B) $\sqrt[4]{3}$ C) 13
D) 2 E) 0

PROBLEMA 79

Siendo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{87} & \frac{6}{87} & -\frac{9}{87} \\ 0 & \frac{2}{87} & \frac{1}{87} \\ \frac{3}{87} & -\frac{1}{87} & \frac{2}{87} \end{bmatrix}$$

Calcular: Traza (A^{-1})

- A) 33 B) 11 C) 44
D) 45 E) 60

PROBLEMA 80

Calcular el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

- A) $a^6 - b^6$ B) $(a^2 - b^2)^3$
C) $(a^2 + b^2)^3$ D) $a^6 b^6$
E) $a^3 b^3$

PROBLEMA 81

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$$

- A) $\frac{-abcd}{ab(c+d)+cd(a+b)}$
B) $\frac{abcd}{ab(c+d)+cd(a+b)}$

C) $\frac{-abcd}{ab(a+b)+cd(c+d)}$

D) $\frac{abcd}{ab(a+b)+cd(c+d)}$

E) $\frac{-abcd}{ab+bc+cd+ad}$

PROBLEMA 82

Sabiendo que:

$$ADJ(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad y$$

$$B = [13 \ 8 \ 3 \ 4]$$

Hallar la matriz X que verifica la ecuación:

$$X \cdot A = B$$

- A) $[3 \ 2 \ 1 \ 0]$ B) $[2 \ 3 \ 1 \ 0]$
C) $[2 \ 1 \ 3 \ 0]$ D) $[1 \ 2 \ 3 \ 0]$
E) $[0 \ 1 \ 2 \ 3]$

PROBLEMA 83

Dadas las matrices "A", "B" y "C" tales que: $B \cdot X \cdot A = C$;

donde: $C = ADJ(B)$; $B = ADJ(A)$

y: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Hallar: $|X|$

- A) 24 B) 24^2 C) 24^3
D) 24^4 E) 24^5

PROBLEMA 84

Sea la matriz: $A = [a_{ij}]$ de orden n tal que $|A| = 10$ y la matriz B que resulta de multiplicar una fila de A por un escalar k no nulo. Calcular:

$$|A \cdot ADJ(A)| \cdot B$$

- A) $10^{n+1} \cdot K$ B) $10^{n^2+1} \cdot k$
C) $10^{n^2} \cdot k$ D) $10^{2n} \cdot k$
E) $10^{2n+1} \cdot k$

PROBLEMA 85

Indicar si es verdadero (V) o falso (F) en cada caso:

- * Si en la matriz A de orden n , existe por lo menos una submatriz cuadrada singular de orden k ($k < n$), entonces el rango de A es k .
- * Si en una matriz de orden 5×4 , todas las submatrices cuadradas de orden mayor o igual que 2 son regulares, entonces su rango es 4.
- * Si en una matriz de orden 5×6 todas las submatrices cuadradas de orden menor o igual que 3 son no singulares, entonces su rango es 3.

- A) VVF B) VFF C) VVF
D) FVV E) FVF

PROBLEMA 86

Hallar "x", tal que el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ x & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{sea el menor posible.}$$

- A) 0 B) -1 C) 1
D) -3 E) 3

PROBLEMA 87

Sabiendo que $|A^{-1}|$ es positivo y:

$$ADJ(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema: $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

dar el valor de $(y+z)$

- A) 15 B) 10 C) 5
D) $3\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA 88

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolver la ecuación: $A \cdot X = X$

donde X es una matriz columna.

Dar una solución particular X^t

- A) $[-13 \ -2 \ 4 \ 3]$ B) $[-11 \ -2 \ 4 \ 1]$
C) $[-13 \ -3 \ 4 \ 1]$ D) $[-11 \ -2 \ 4 \ 3]$

- E) $[-13 \ -2 \ 4 \ 5]$

PROBLEMA 89

Siendo A y B dos matrices del mismo orden n tal que: $|A| = x$ y $|B| = x^2$

Calcular el determinante de:

$$D = |A^t \cdot B \cdot A^{-1}| \cdot B^{-1}$$

- A) x^{2n} B) x^{2n-1}

- C) $x^{2(n-1)}$ D) x^{2n+1}

- E) $x^{2(n+1)}$

PROBLEMA 90

Si A es una matriz cuadrada de orden n , tal que

$|A| = 3$, calcular:

$$|ADJ(ADJ(3A))|$$

- A) $3^{(n+1)(n^2-1)}$ B) $3^{(n+1)^2(n-1)}$

- C) $3^{(n+1)(n-1)^2}$ D) $3^{(n+1)^3}$

- E) $3^{(n-1)^3}$

PROBLEMA 91

Dada la matriz A de orden n , tal que: $|A| = p$

($p \in \mathbb{R} - \{0\}$), hallar:

$$||p \cdot A^t| \cdot A^{-1}|$$

- A) p^{n^2+n-1} B) p^{n^2+n+1}

- C) p^{2n+1} D) p^{2n-1}

- E) $p^{(n+1)^2}$

PROBLEMA 92

Siendo A una matriz de orden 4, tal que:

$$|A| = \frac{1}{5}, \text{ calcular:}$$

$$|ADJ(ADJ(A^{-1}))|$$

- A) 5 B) 5^4 C) 5^9

- D) 5^3 E) 5^6

PROBLEMA 93

Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_1^2 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & \dots & 0 \\ 1 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_1^n & C_2^n & C_3^n & \dots & C_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

- A) $2^n C_n^{2n}$ B) C_n^{2n}

- C) $(C_n^{2n})^2$ D) 2^n

- E) 1

PROBLEMA 94

Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- A) $(-1)^{n-1} \cdot n \cdot n!$ B) $(-1)^n \cdot n!$

- C) $(-1)^{n-1} \cdot n!$ D) $(-1)^{n-1} \cdot n$

- E) $n \cdot n!$

PROBLEMA 95

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad y$$

$$B = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

donde: $i = \sqrt{-1}$

Calcular: $|A^{-1} + B^{-1}|$

- A) 6 B) -6 C) 0

- D) 12 E) -12

PROBLEMA 96

Siendo A una matriz de orden 5 tal que:

$$|A| = 5$$

$$y: M = |5 \cdot A^{-1}| \cdot A^t$$

$$N = |A^t \cdot A| \cdot (5 \cdot A^{-1})^t$$

Calcular: $|M \cdot N|$

- A) 5^{35} B) 5^{32} C) 5^{28}

- D) 5^{25} E) 5^{21}

PROBLEMA 97

Dada la matriz cuadrada: $A = [a_{ij}]$ de orden n tal que:

$$a_{ij} = \max\{i; j\} \quad ; \quad \forall i; j = \overline{1; n}$$

Calcular: $|A|$

- A) $(-1)^n$ B) $(-1)^{n+1}$

- C) n D) $(-1)^n \cdot n$

- E) $(-1)^{n+1} \cdot n$

PROBLEMA 98

En el sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = a \\ -4x + y - z = b \\ 7x + 12y - 22z = c \end{cases}$$

Si: $c = 5a + 2b$, entonces éste:

- A) Es compatible
- B) Tiene solución única
- C) Tiene infinitas soluciones
- D) No tiene solución
- E) Depende de $a \wedge b$

PROBLEMA 99

Siendo A y B dos matrices cuadradas de orden n , indicar si es verdadero (V) o falso (F) cada uno de los enunciados siguientes:

- * $|ADJ(A^t)| = |ADJ(A^{-1})|$
- * $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$
- * Si: $A^2 = -I \rightarrow |ADJ(A)|^2 = 1$

- A) VVF
- B) VFF
- C) FFF
- D) FVV
- E) FVF

PROBLEMA 100

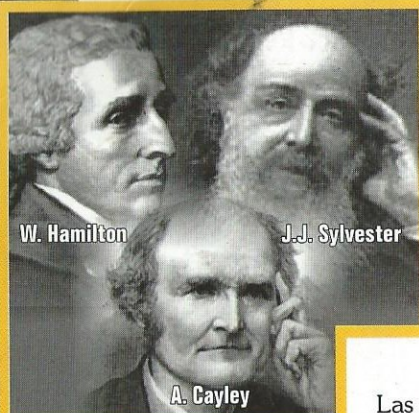
Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_1^2 & C_1^3 & C_1^4 & \dots & C_1^n \\ 1 & C_2^3 & C_2^4 & C_2^5 & \dots & C_2^{n+1} \\ 1 & C_3^4 & C_3^5 & C_3^6 & \dots & C_3^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^n & C_{n-1}^{n+1} & C_{n-1}^{n+2} & \dots & C_{n-1}^{2n-2} \end{vmatrix}$$

- A) 1
- B) C_n^{2n}
- C) C_n^{3n}
- D) $2^n C_n^{2n}$
- E) $2^n C_n^{3n}$

CLAVES

1.	E	21.	B	41.	C	61.	A	81.	A
2.	B	22.	B	42.	E	62.	C	82.	A
3.	D	23.	E	43.	A	63.	D	83.	E
4.	D	24.	D	44.	B	64.	E	84.	C
5.	B	25.	A	45.	E	65.	D	85.	E
6.	A	26.	D	46.	B	66.	E	86.	A
7.	E	27.	A	47.	C	67.	A	87.	E
8.	D	28.	D	48.	C	68.	E	88.	E
9.	C	29.	E	49.	E	69.	B	89.	C
10.	C	30.	C	50.	B	70.	C	90.	C
11.	E	31.	E	51.	A	71.	C	91.	A
12.	E	32.	A	52.	C	72.	A	92.	C
13.	A	33.	B	53.	D	73.	C	93.	E
14.	E	34.	B	54.	B	74.	E	94.	A
15.	A	35.	B	55.	C	75.	B	95.	C
16.	D	36.	A	56.	E	76.	C	96.	A
17.	A	37.	E	57.	B	77.	B	97.	E
18.	D	38.	B	58.	D	78.	A	98.	C
19.	C	39.	E	59.	E	79.	C	99.	E
20.	B	40.	A	60.	B	80.	B	100.	A



W. Hamilton

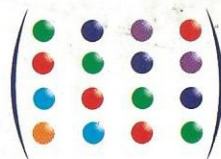
J.J. Sylvester

A. Cayley

Álgebra

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo. Los conceptos de matriz y todos los relacionados fueron desarrollados básicamente en el siglo XIX por matemáticos como los ingleses J.J. Sylvester y Arthur Cayley y el irlandés William Hamilton.

El álgebra matricial proporcional es una técnica útil para manipular conjuntos grandes de datos y resolver problemas relacionados que se modelan mediante las matrices.



Editorial
CUZCAN
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura



cuzcano editorial

INFORMES Y VENTAS

Av. Alfonso Ugarte N°1310 Of. 212 - 2do. Piso
(cruce con la Av. Bolivia)



423-8154